

Основы теории вероятностей

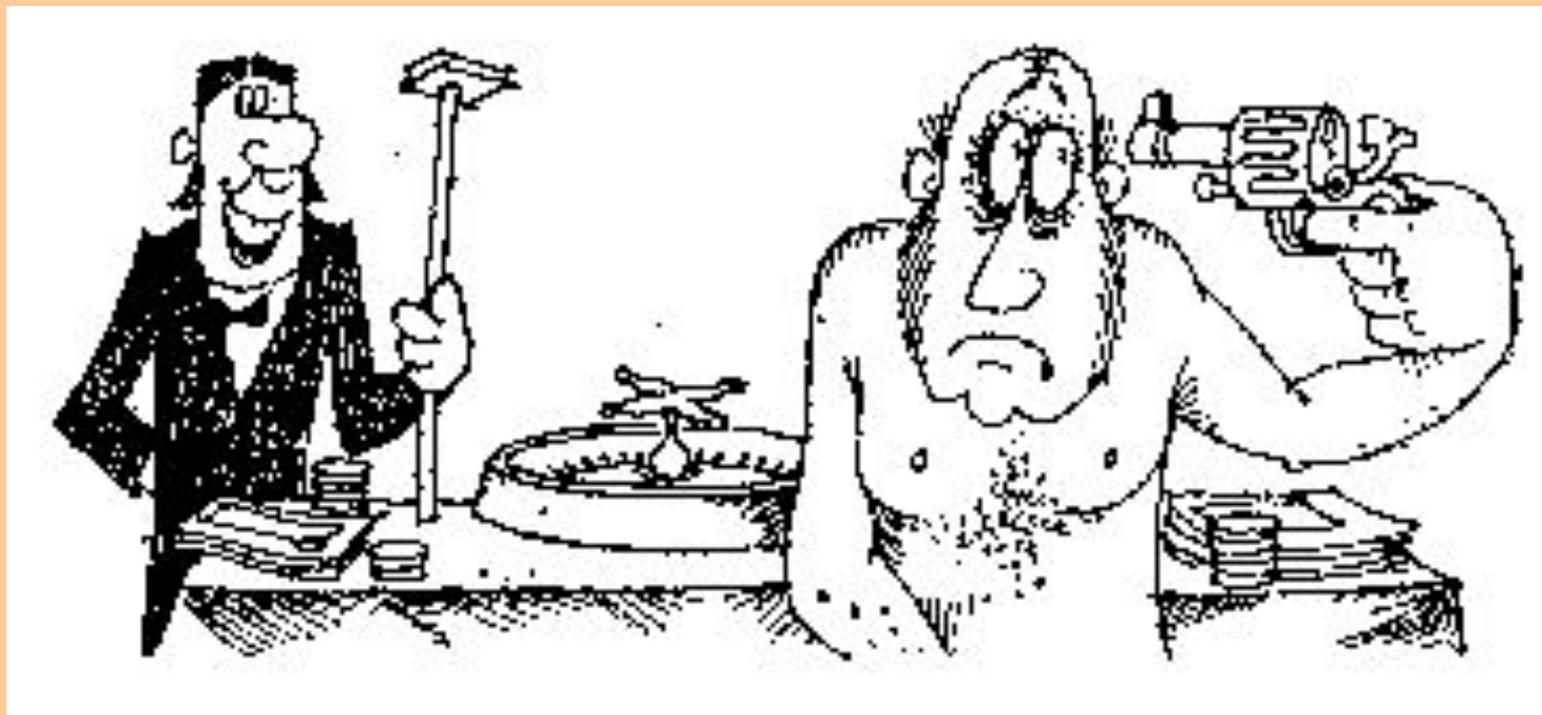


ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. Общие правила комбинаторики.
2. Выборки элементов.
3. Выборки элементов с повторениями.

Комбинаторика –

область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству.



Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев тогдашнего общества большое место занимали азартные игры.

Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

Теоретические исследования вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские ученые



Пьер Ферма
Харламова Ирина
(1601-65)
Юрьевна



Блез Паскаль
(1623-62)
09/16/2023

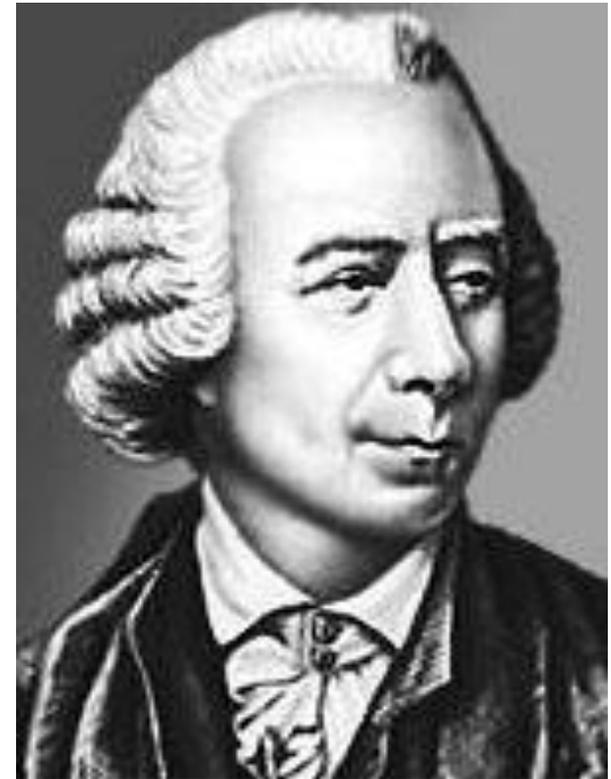


Яков
Бернулли
(1654-1705)

Харламова Ирина
Юрьевна



Готфрид
Лейбниц
(1646-1716)



Леонард
Эйлер
(1707-1783)

1 ?

ОБЩИЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ



ПРАВИЛО СУММЫ

Если некоторый объект **A** можно выбрать ***m*** способами, а другой объект **B** можно выбрать ***k*** способами, то выбор «либо **A**, либо **B**» можно осуществить ***m+k*** способами.

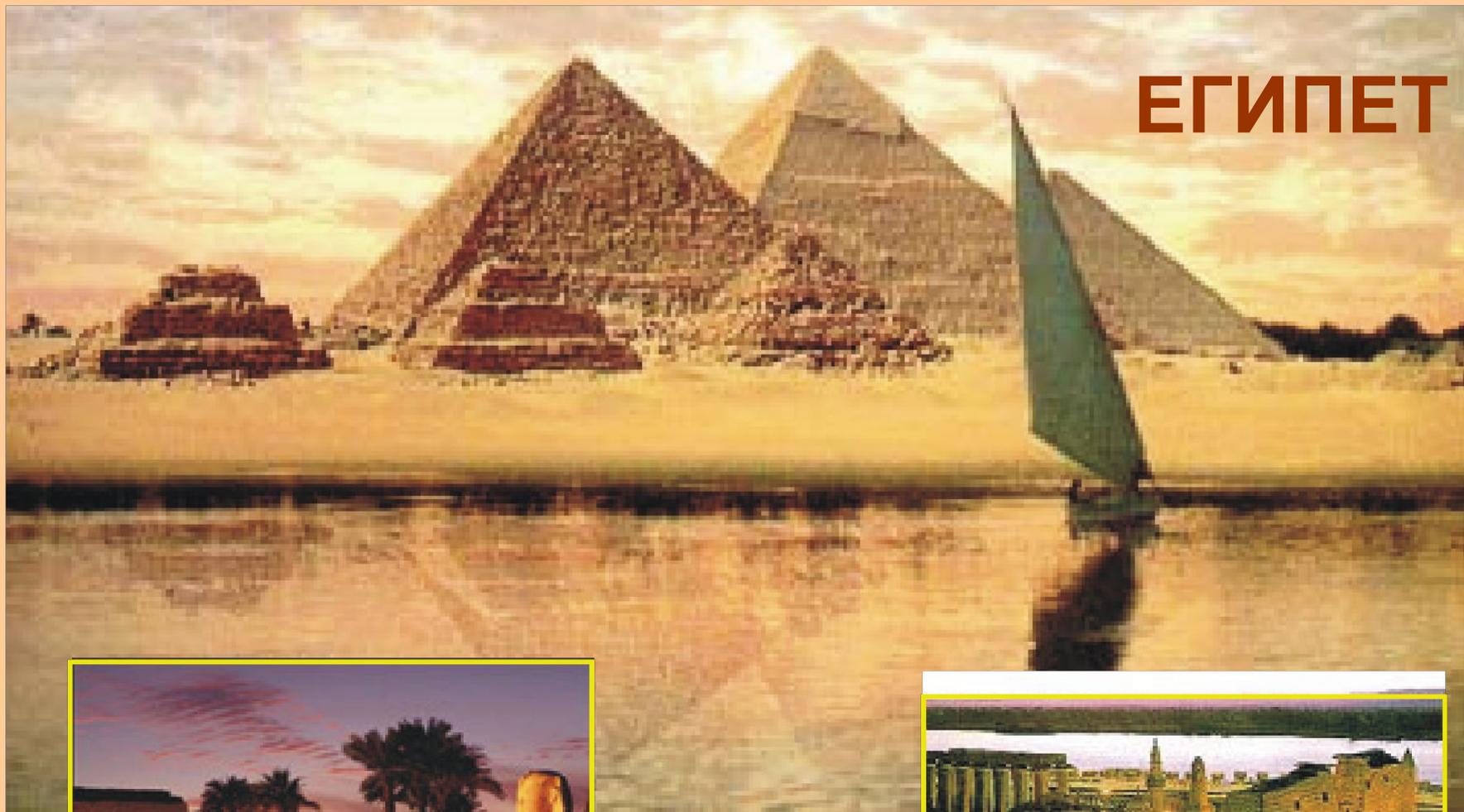


ТУРЦИЯ

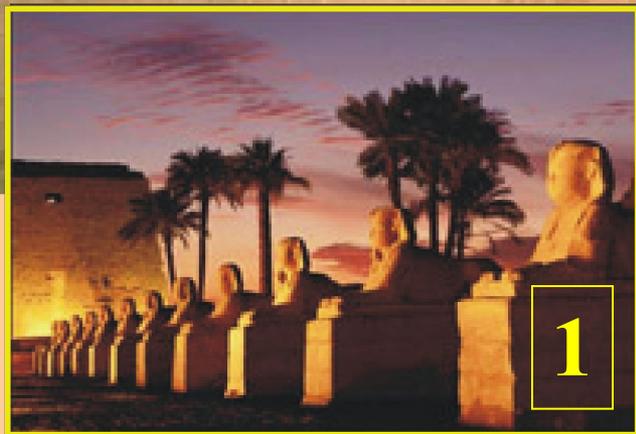


Юрьевна

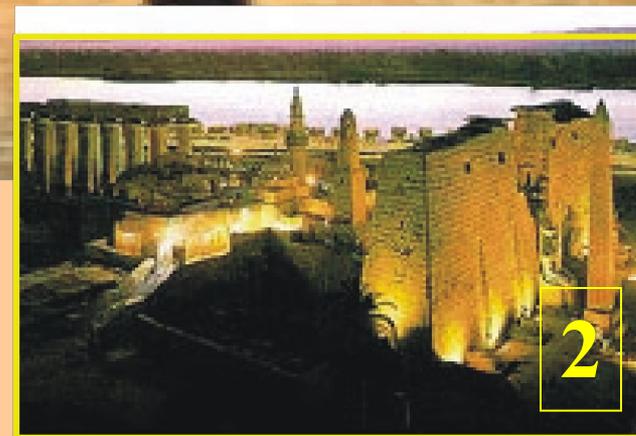
09/16/2023



ЕГИПЕТ



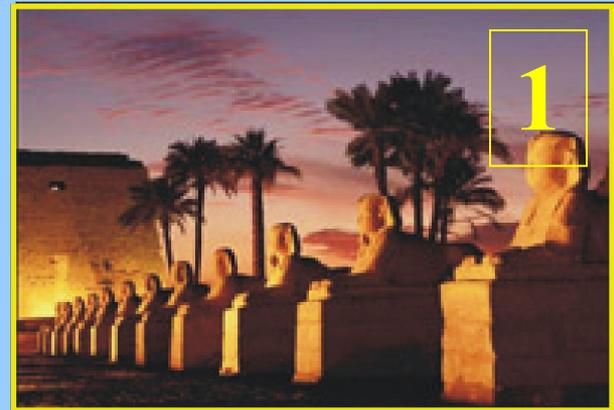
1



2

Юрьевна

09/16/2023



$$3 + 2 = 5$$

Юрьевна

09/16/2023

ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Если объект A можно выбрать m способами, и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать k способами, то выбор пары объектов

A и B

в указанном порядке можно осуществить $m \cdot k$ способами.

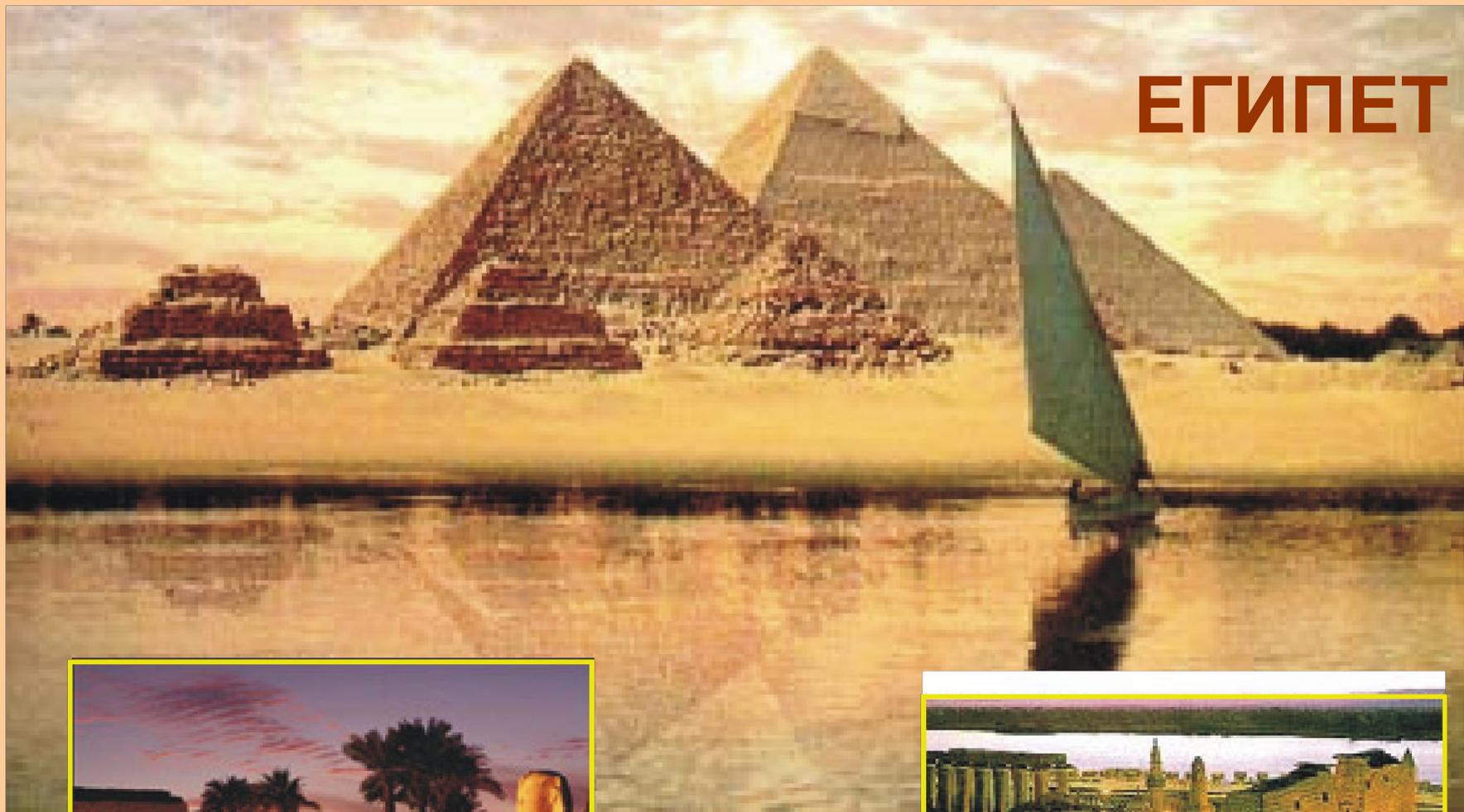


ТУРЦИЯ

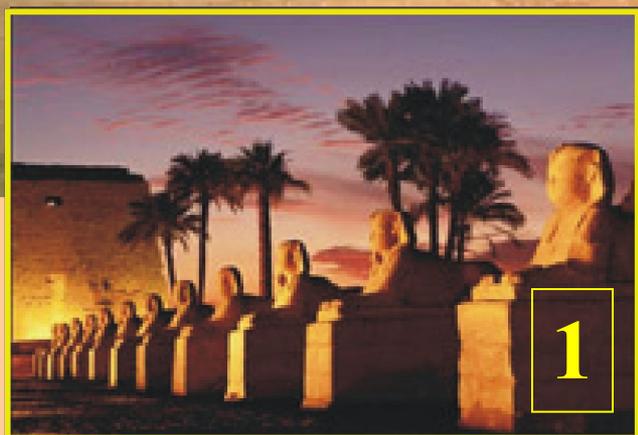


Юрьевна

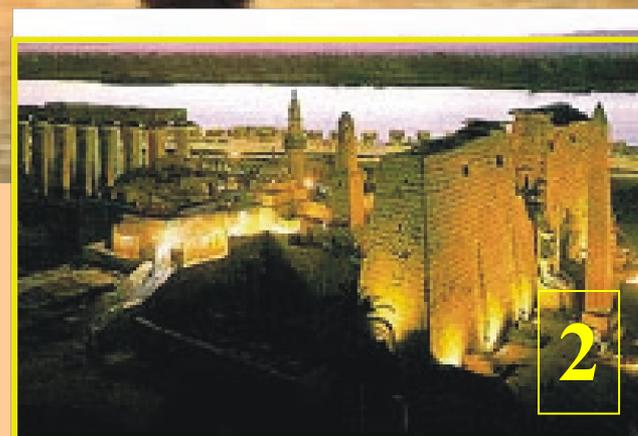
09/16/2023



ЕГИПЕТ



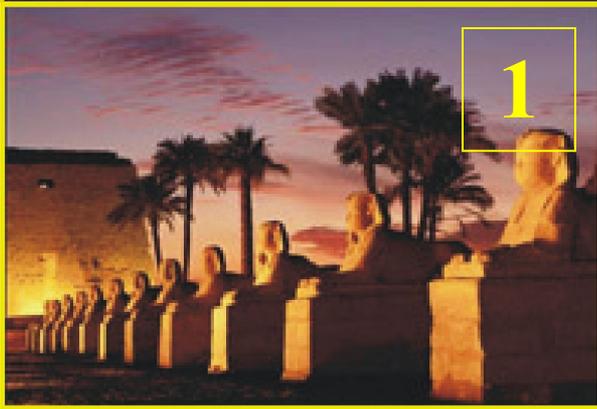
1



2

Юрьевна

09/16/2023

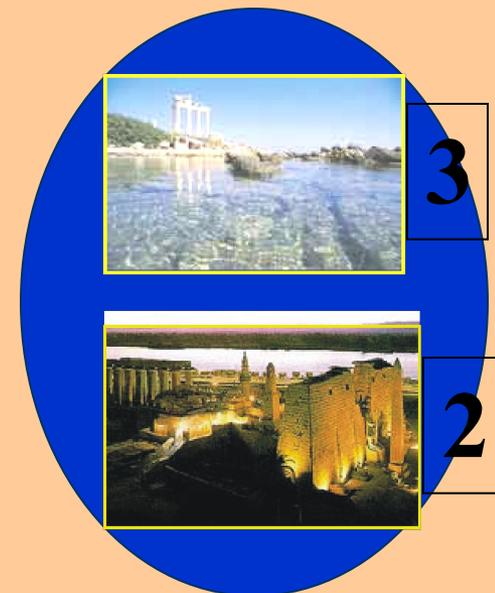
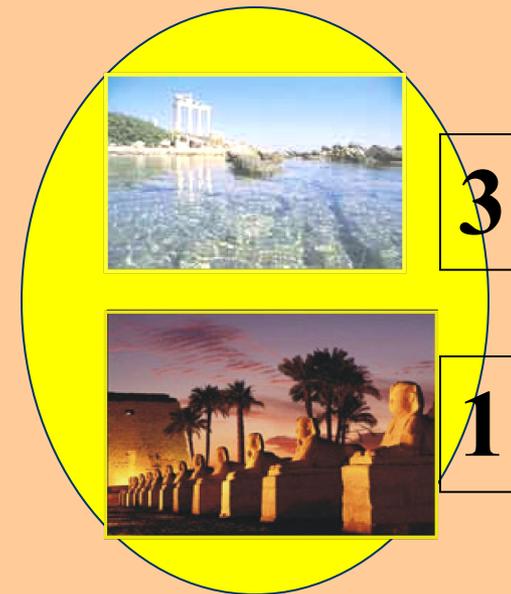
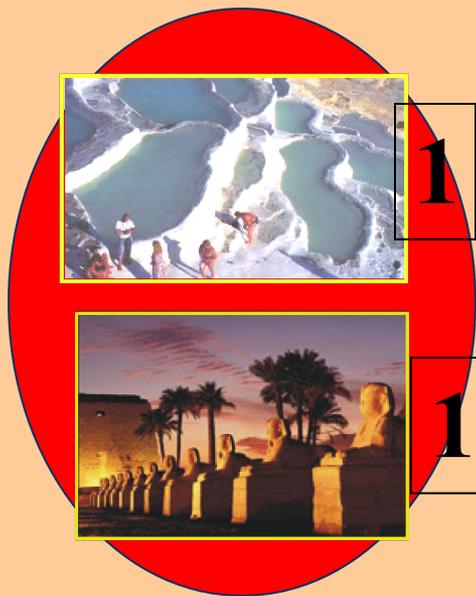


Юрьевна



$$2 \times 3 = 6$$

09/16/2023



Юрьевна

09/16/2023

Правило суммы



😊 **2** Карламова Ирина
Юрьевна +

4

= 6

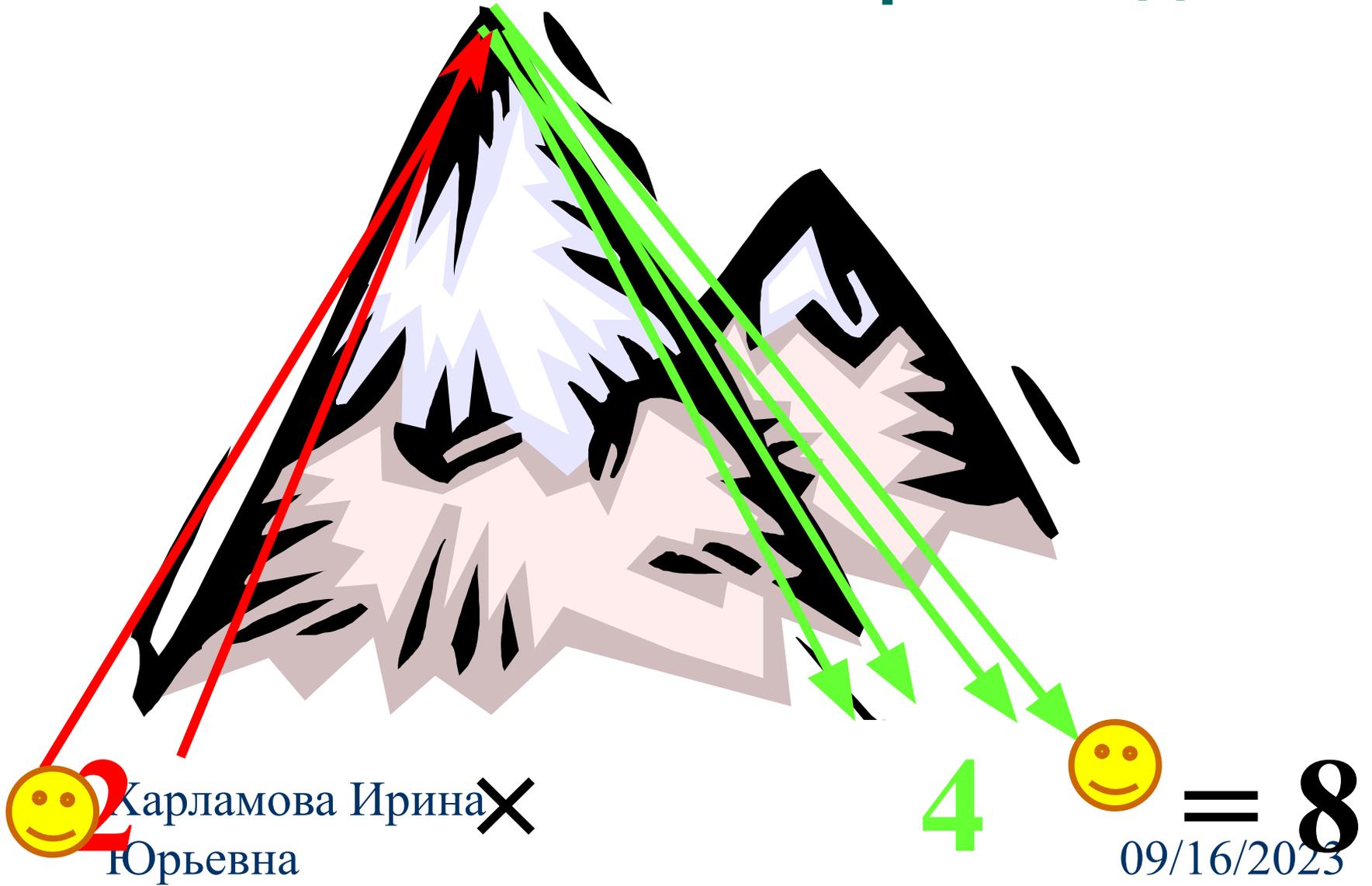
09/16/2023

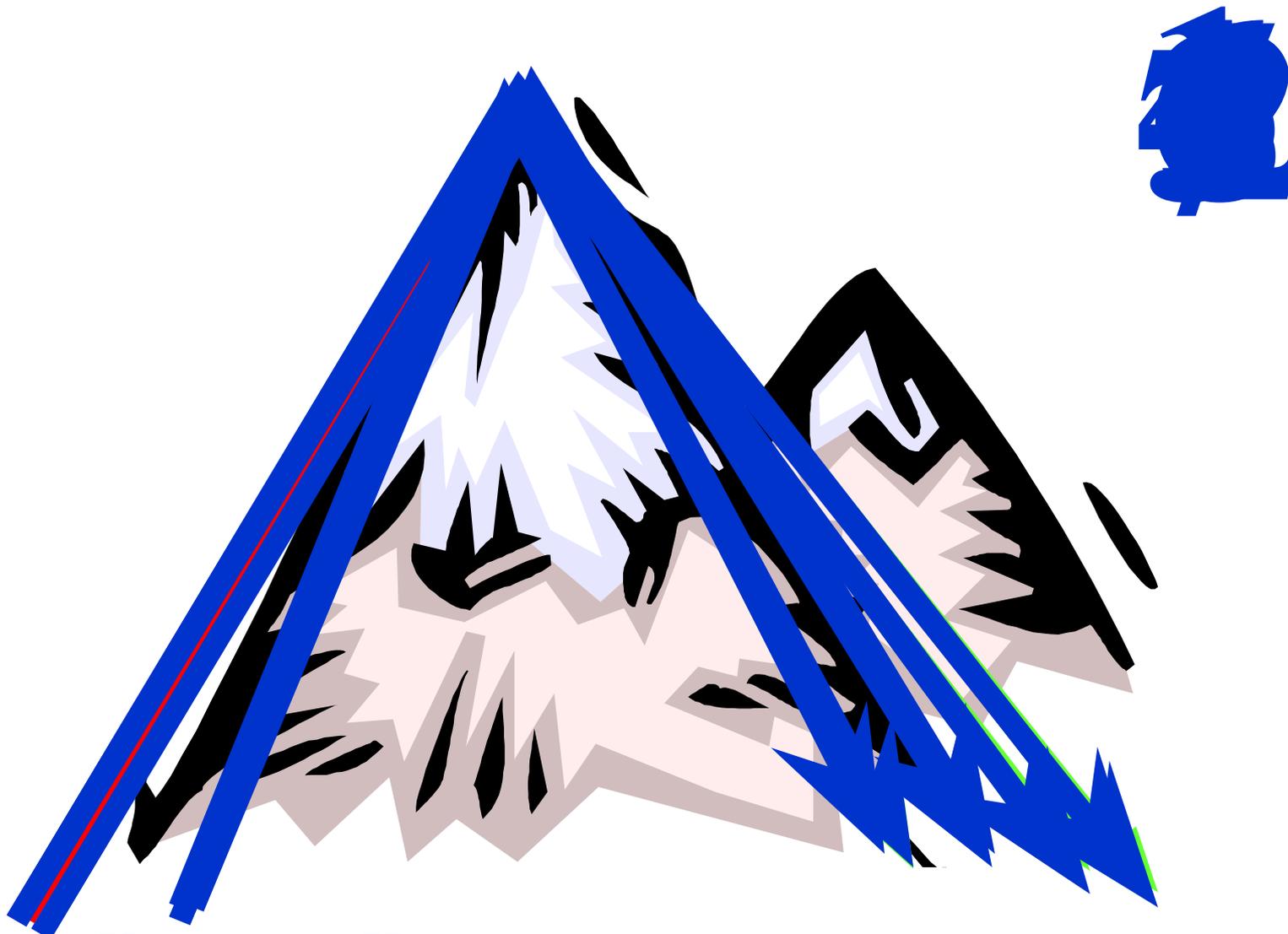


Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

Правило произведения





Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

2?

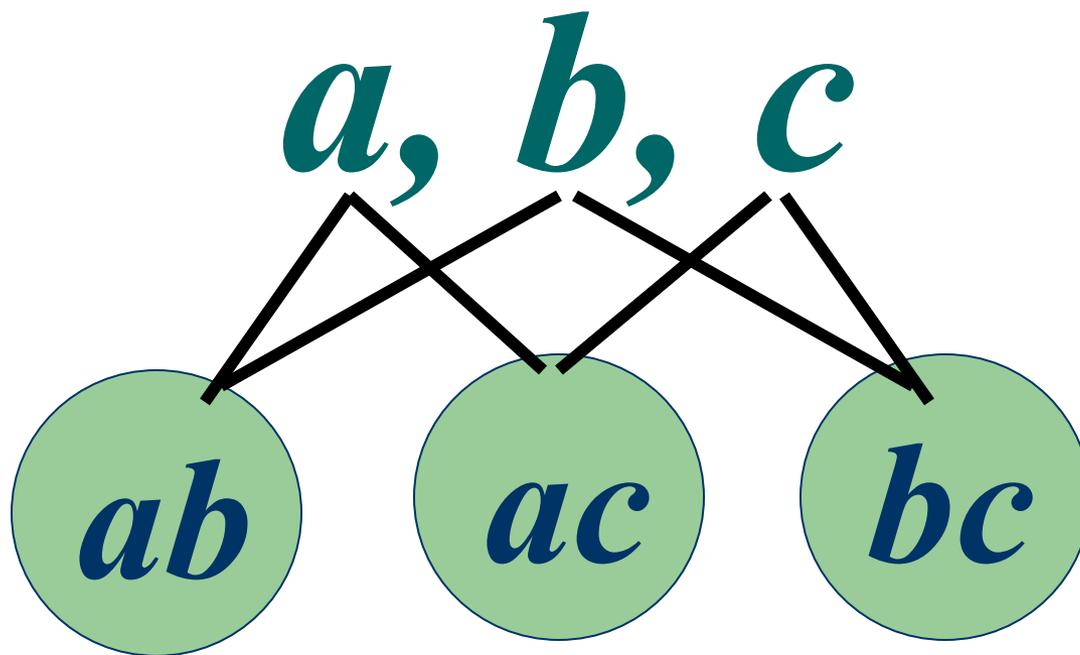
Выборки элементов

- Размещения
- Сочетания
- Перестановки



Размещения

- *Размещениями* из n элементов по k называются такие выборки, которые, имея по k различных элементов, выбранных из числа данных n , отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.



СОСТАВОМ



**П
О
Р
Я
Д
К
О
М**

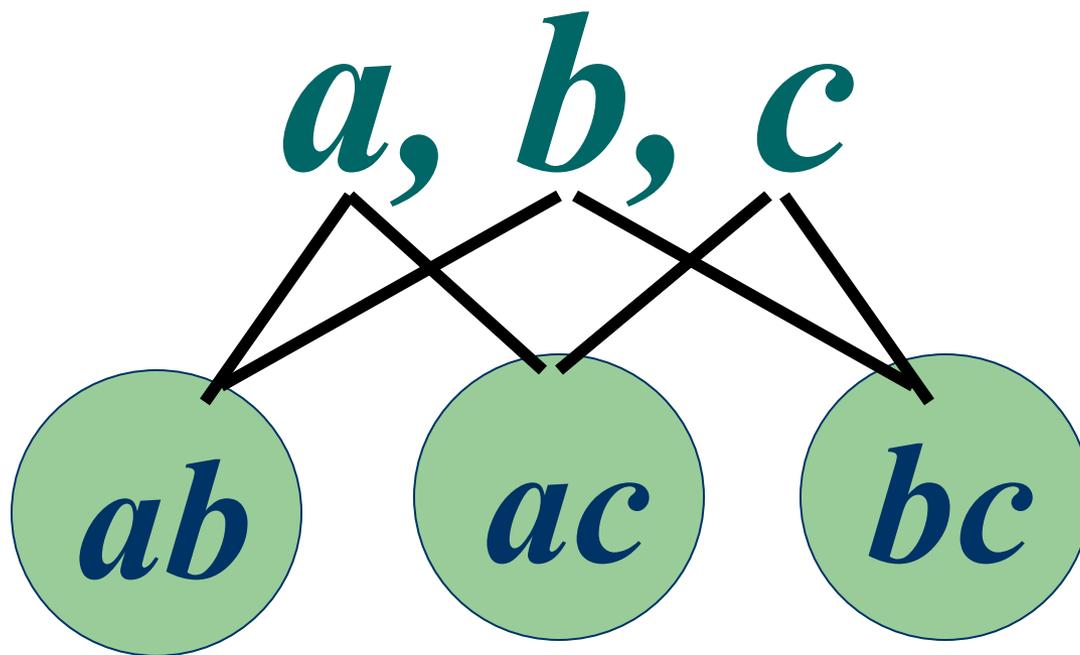
Число размещений из n элементов по k

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n, & \text{если } n > 0; \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

Число размещений из 3 элементов по 2

$$\begin{aligned} A_3^2 &= \frac{3!}{(3-2)!} = \\ &= \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6 \end{aligned}$$



СОСТАВОМ



**П
О
Р
Я
Д
К
О
М**



В турнире по футболу участвуют 18 команд. Борьба идет за золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами медали могут быть распределены между командами?



Юрьевна



09/16/2023

A B C D E F

J
H
I

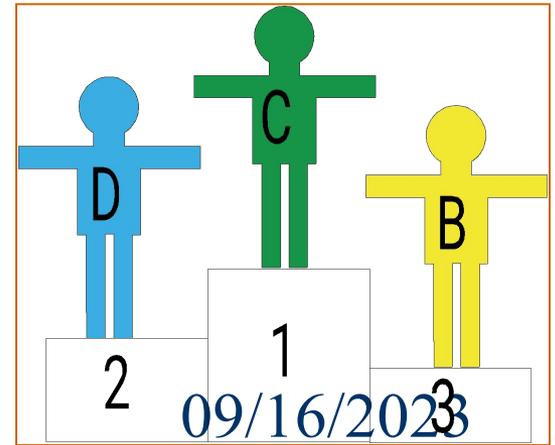
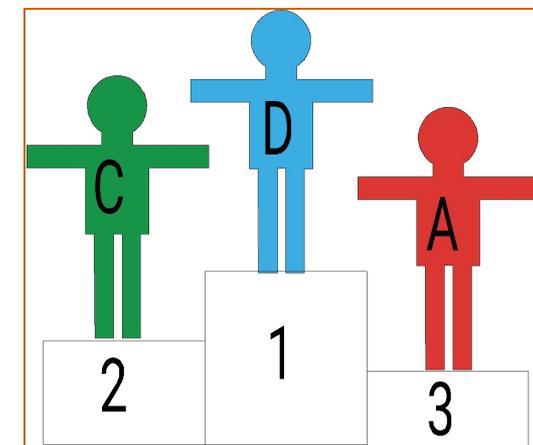
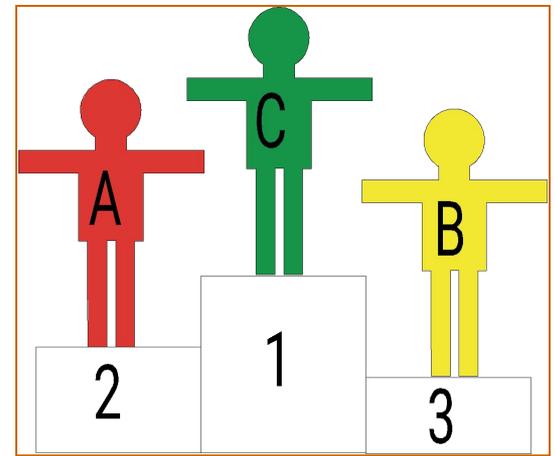
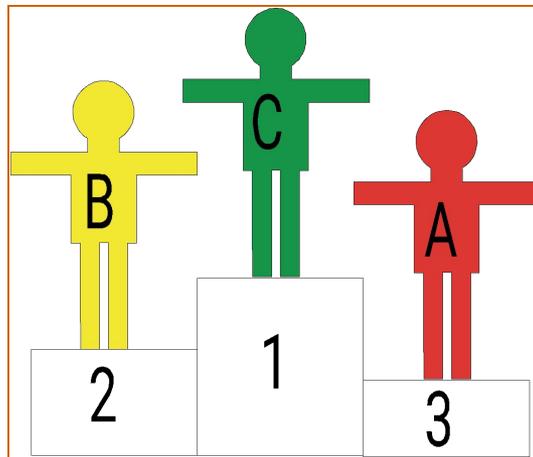
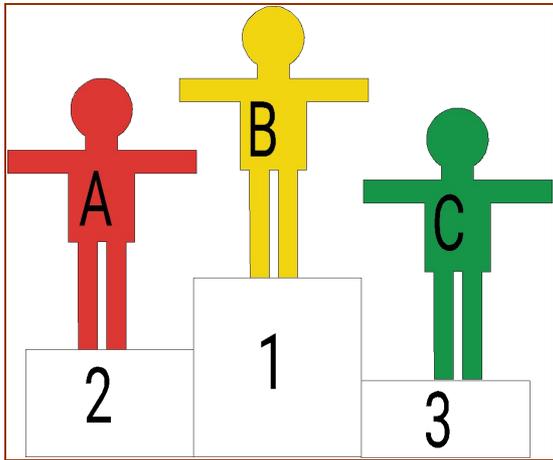
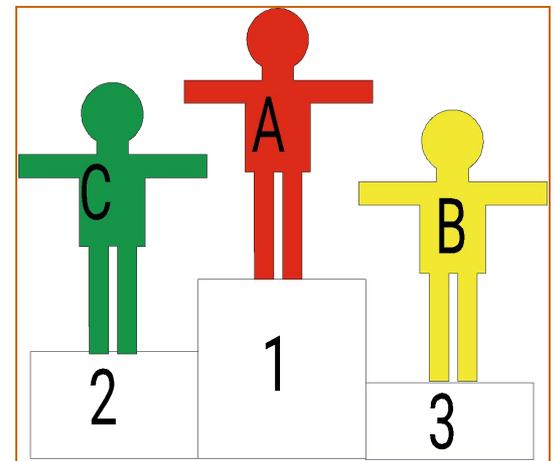
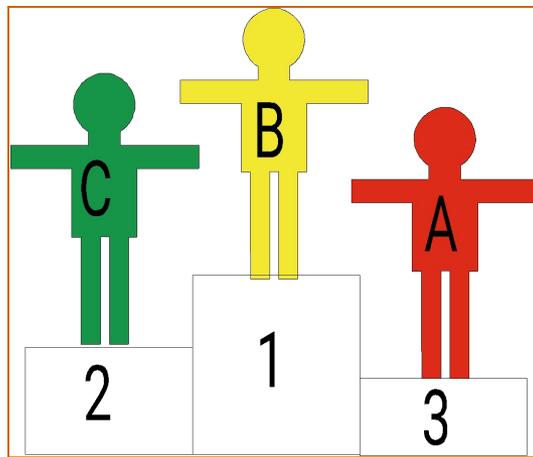
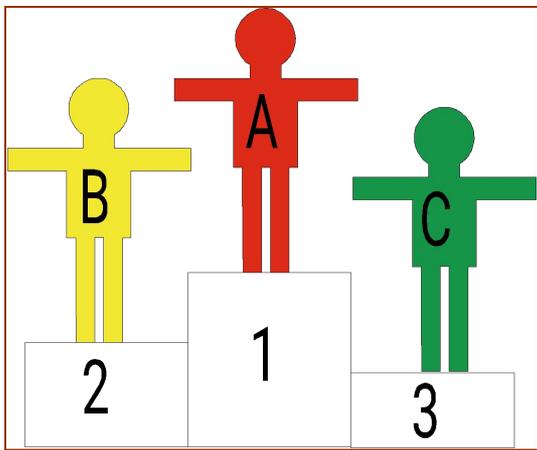


G
K
L

M N O P Q R

Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023



$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} =$$



$$= \frac{18!}{15!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 15} =$$

$$= 16 \cdot 17 \cdot 18 = 4896.$$

$$n=k$$

- Соответствующие этому случаю размещения называют перестановками.

Перестановки

- *Перестановками* из n элементов называются такие выборки, которые, имея по n различных элементов, отличаются одна от другой лишь порядком следования этих элементов.

a, b, c

a b c

a c b

b a c

п о р я д к о м

b c a

c b a

c a b

Число перестановок из n элементов

$$\begin{aligned} P_n &= A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \\ &= \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \end{aligned}$$

Число перестановок из n элементов

$$P_n = n!$$

Число перестановок из 3 элементов

$$P_3 = 3! =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

a, b, c

a b c

a c b

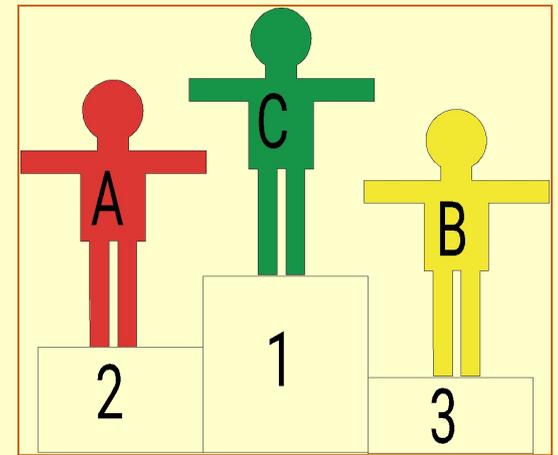
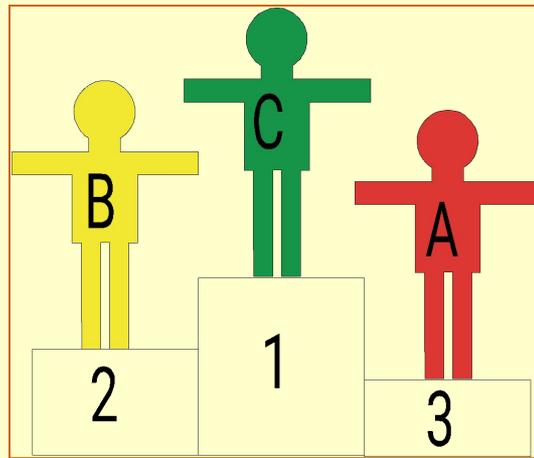
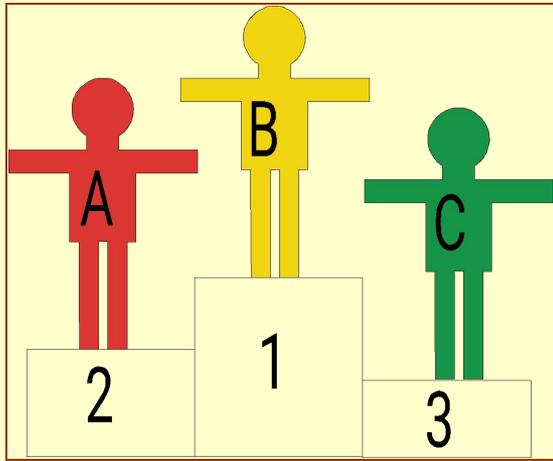
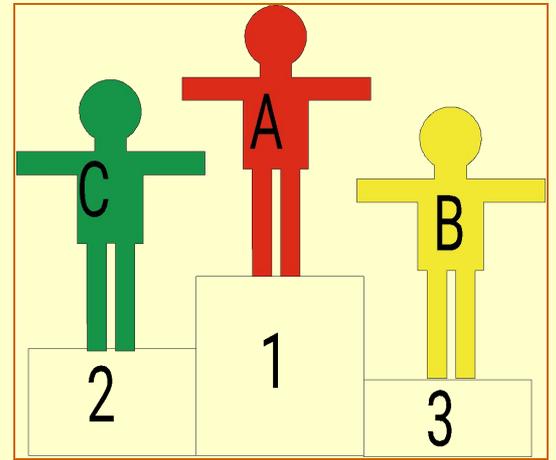
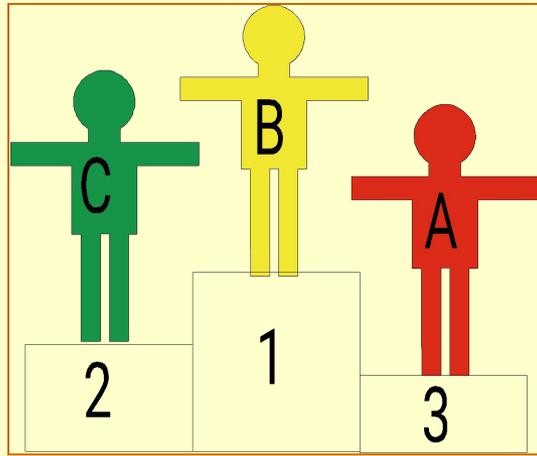
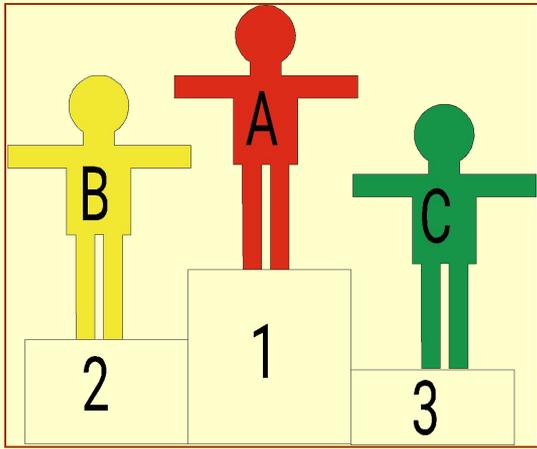
b a c

п о р я д к о м

b c a

c b a

c a b



можно сделать из букв
слова

ЮРИСТ

Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

с ют ир т юи рс

и юр ст т юс ир

ю р и с т

р юи ст и юс тр

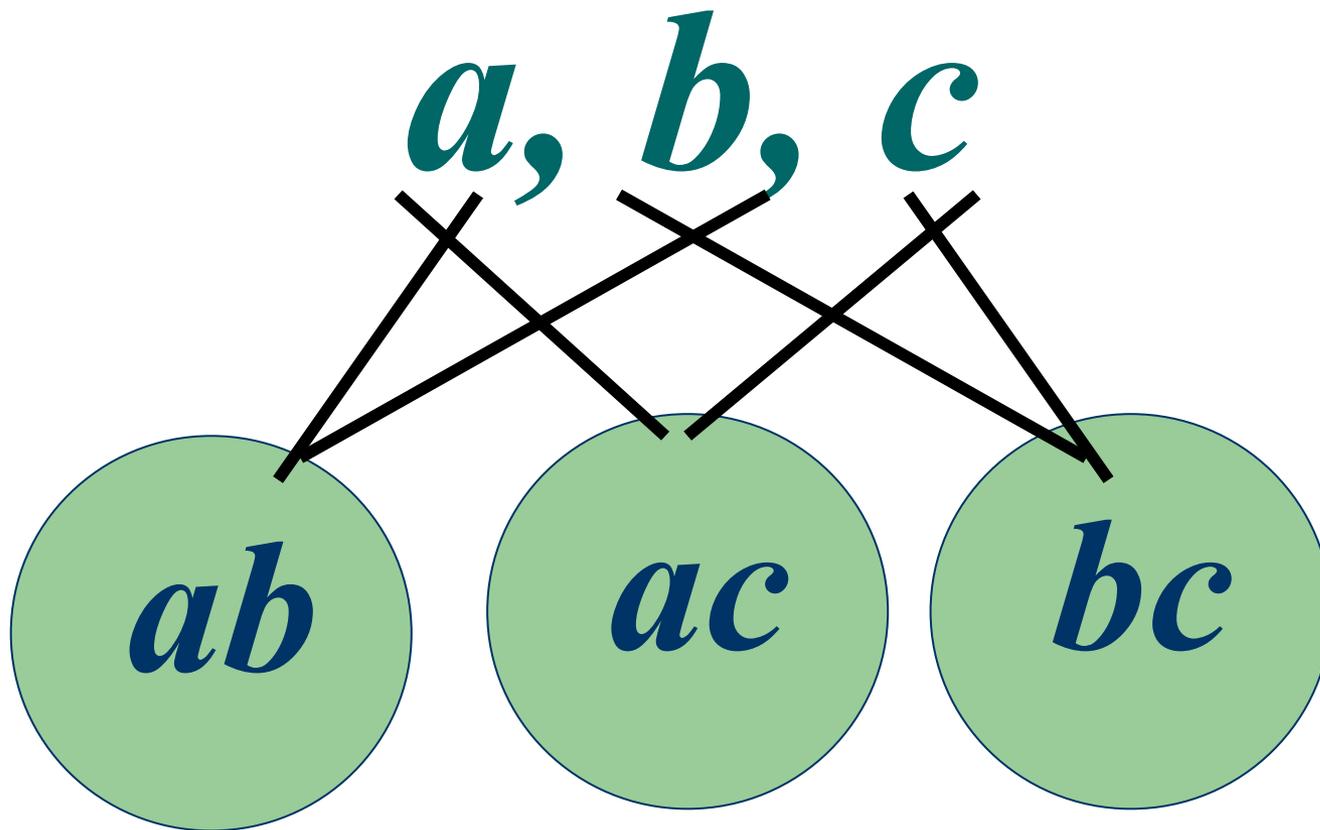
и юр тс р и юс т

Число перестановок из 5 элементов

$$\begin{aligned} P_5 &= 5! = \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \\ &= 120 \end{aligned}$$

Сочетания

- *Сочетаниями* из n элементов по k называются такие выборки, которые, имея по k различных элементов, выбранных из числа данных n , отличаются только составом элементов (порядок расположения элементов значения не имеет).



СОСТАВОМ

Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

Число сочетаний из n элементов по k

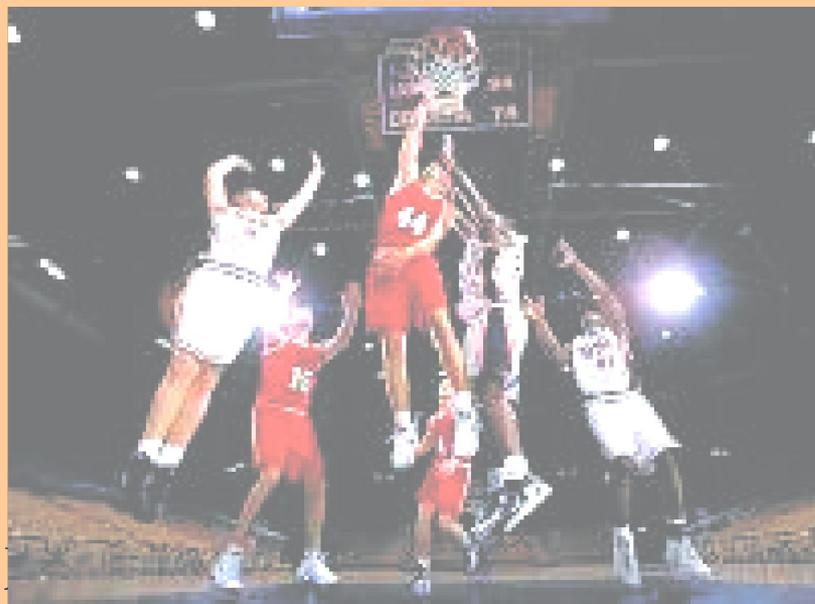
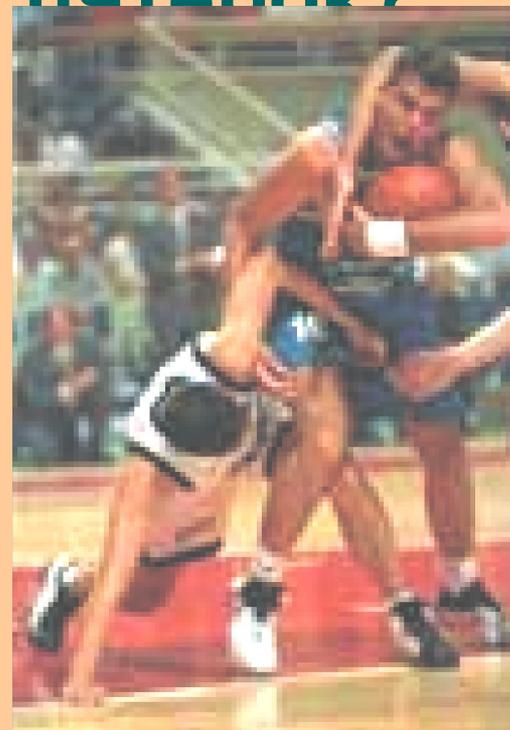
$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Число сочетаний из 3 элементов по 2

$$C_n^k = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} =$$

$$= \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$$

На тренировке
занимаются 15
баскетболистов. Сколько
может быть образовано
тренером разных
стартовых пятерок?



Юрьевна

09/16/2023

Число сочетаний из 15 элементов по 5

$$\begin{aligned} C_{15}^5 &= \frac{15!}{5! \cdot (15 - 5)!} = \\ &= \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \\ &= 3003 \end{aligned}$$

Ирина

Юрьевна

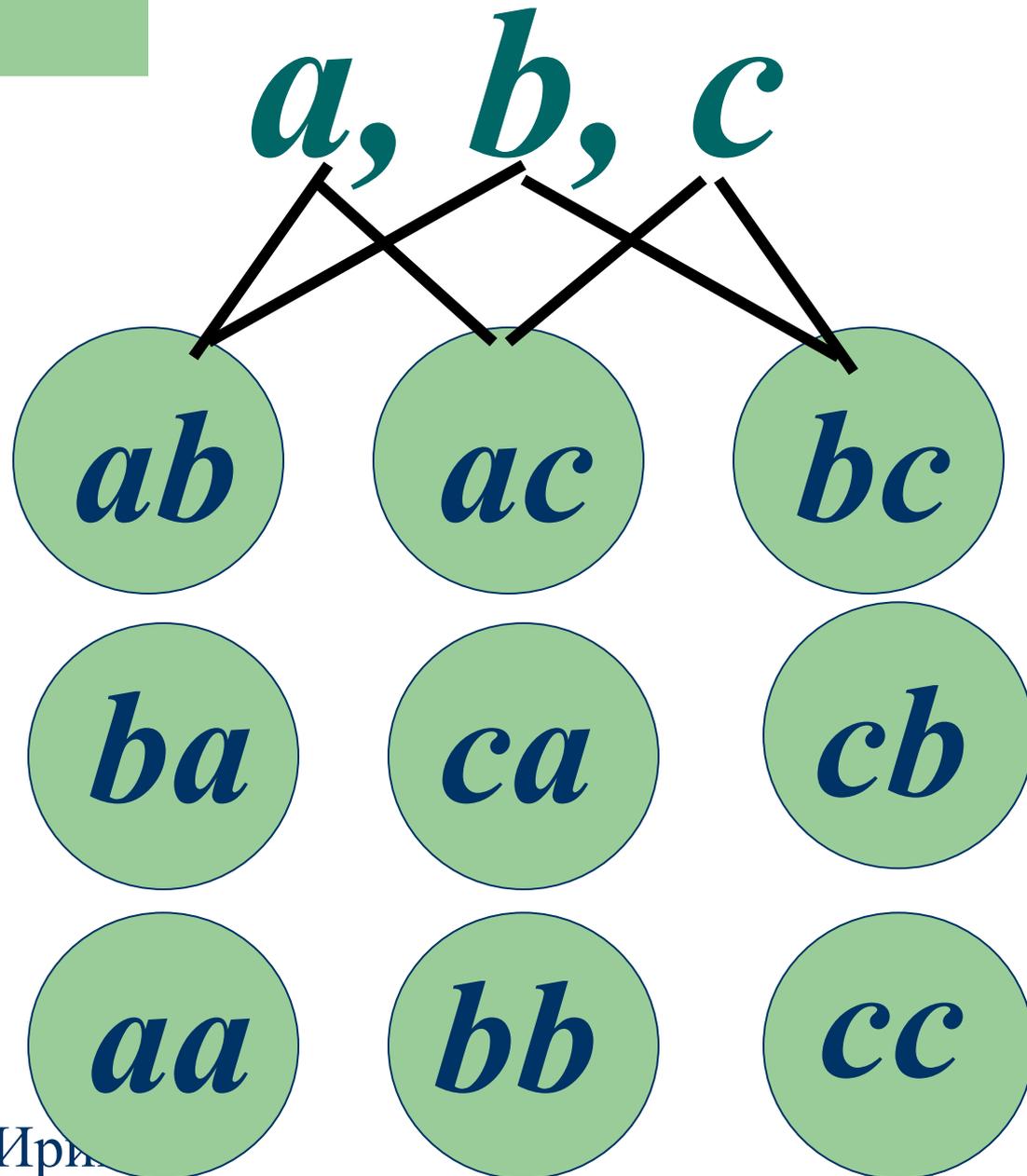
09/16/2023

3? Выборки с повторениями

- Размещения с повторениями
 - Сочетания с повторениями
 - Перестановки с повторениями
-

Размещения с повторениями из n элементов по k

- *Размещениями с повторениями из n элементов по k называются такие выборки, которые, имея по k элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения, причем один и тот же элемент может входить в **выборку более одного раза.***

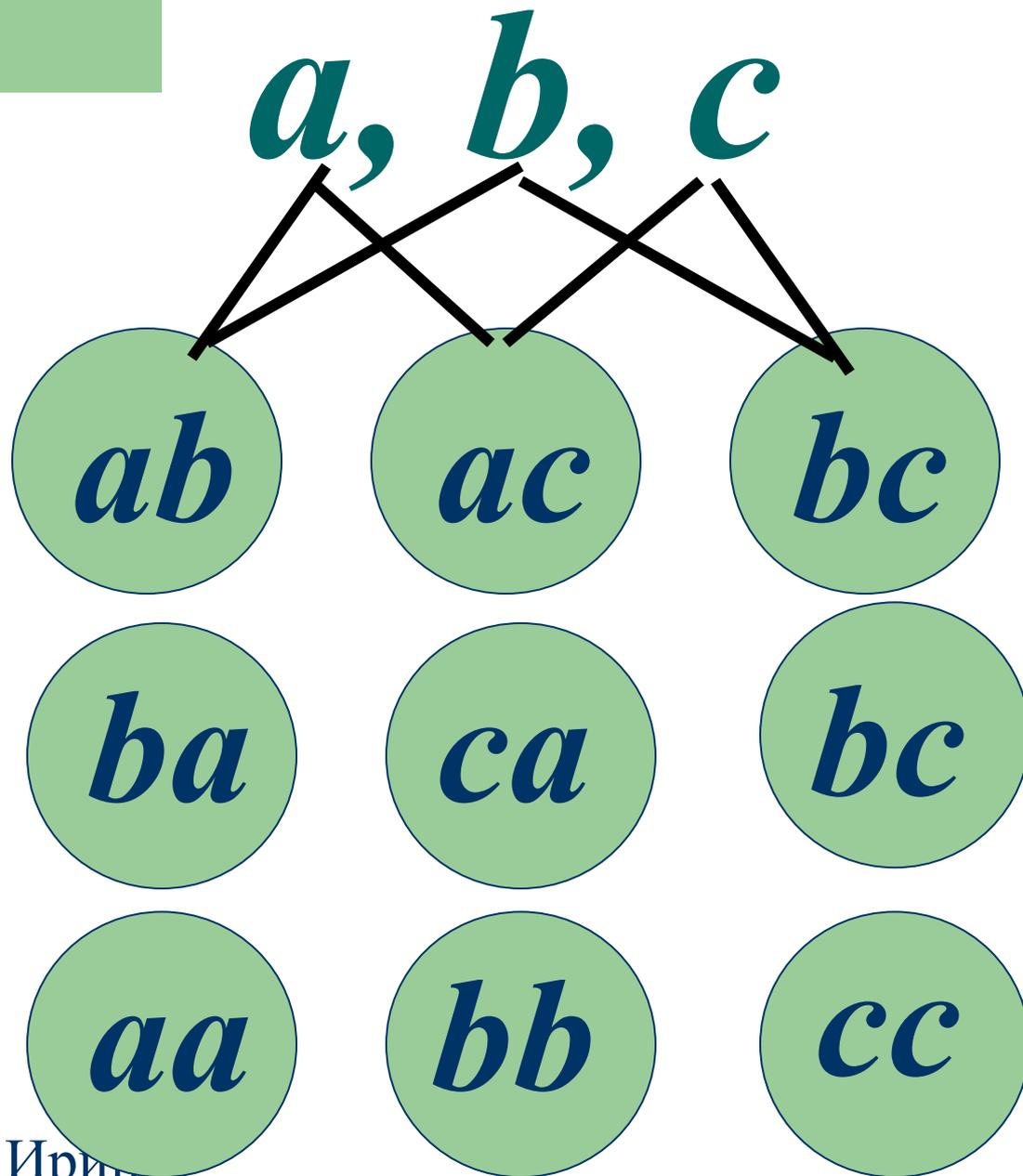


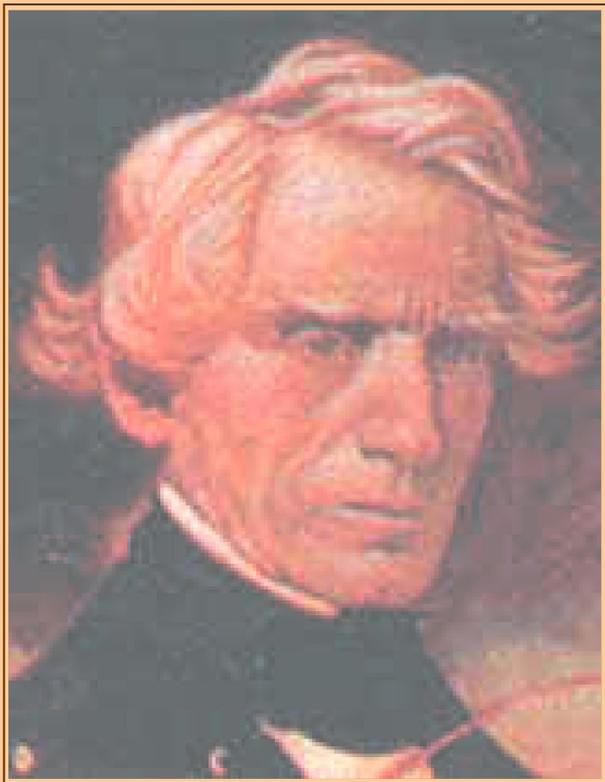
Число размещений с повторениями из n элементов по k

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

Число размещений с повторениями из 3 элементов по 2

$$\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$$





Самуэль Морзе
(1791-1872)

Код Морзе

При передачи сообщений по телеграфу используется код Морзе. В этом коде буквы, цифры и знаки препинания обозначаются точками и тире.

Можно ли передавать сообщение с помощью четырех знаков?

С помощью одного
знака можно передать
ТОЛЬКО
2 буквы:

Е • и Т—

С помощью двух
знаков можно
передать 4 буквы:

$$\tilde{A}_2^2 = 2^2 = 4$$

• •

• —

— •

— —

С помощью трех знаков можно передать 8 букв:

$$\tilde{A}_2^3 = 2^3 = 8$$

С помощью четырех знаков можно передать 16 букв:

$$\tilde{A}_2^4 = 2^4 = 16$$

Общее число букв, которые можно передать четырьмя знаками :

$$2+4+8+16=30$$

Харламова Ирина

Юрьевна

09/16/2023

В русском алфавите 33 буквы, также
надо передавать цифры и знаки
препинания .

Следовательно, 4 знаков не хватит.

$$\tilde{A}_2^5 = 2^5 = 32$$

$$30 + 32 = 62$$

Э••—••

Перестановки с повторениями

Перестановки, в которых хоть один элемент встречается более одного раза, называются *перестановками с повторениями*.

Число перестановок с повторениями из n элементов в которых есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д.

$$\tilde{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

можно сделать из букв
слова

ПРОКУРОР

Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

ПРОКУРОР

ПРОКУРОР

ПРОКУРОР

ПРОКУРОР

Харламова
Юрьевна

09/16/2023

$n=8$: П Р О К У Р О Р

П $n_1=1$

Р $n_2=3$

О $n_3=2$

К $n_4=1$

У $n_5=1$

$$P_8(1,3,2,1,1) = \frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} =$$

$$= 3360$$

$$1 + 3 + 2 + 1 + 1 = 8$$

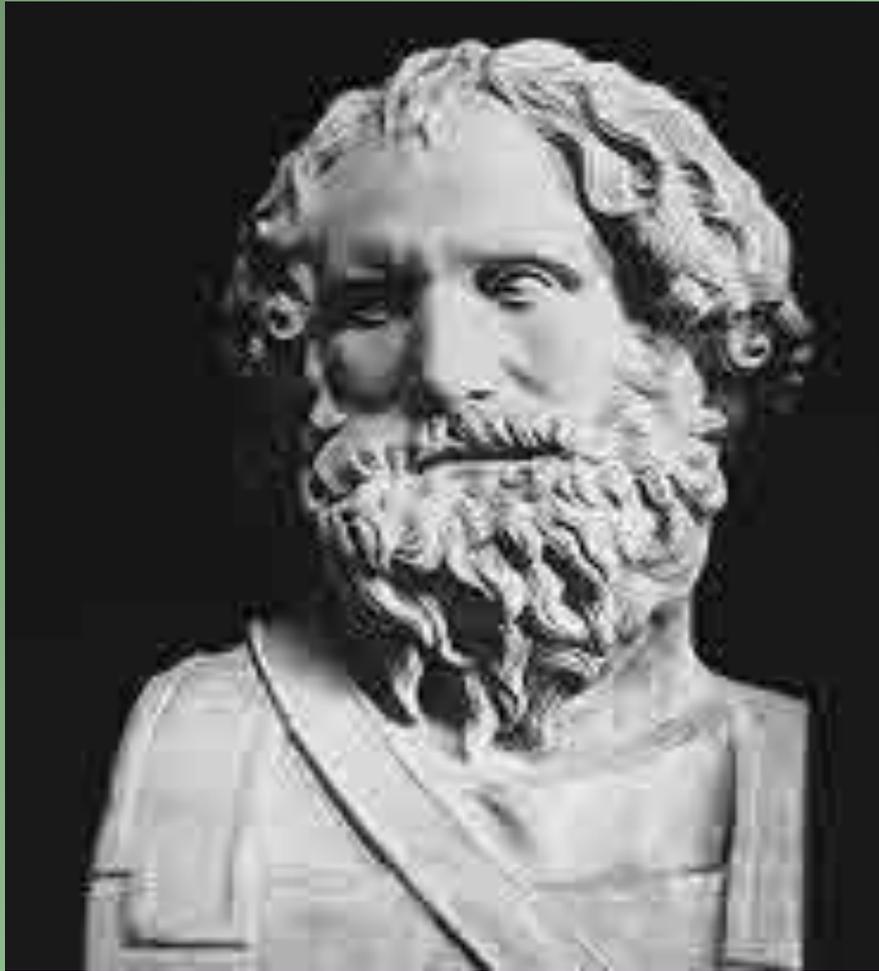
АНАГРАММЫ



До XVII столетия почти не было научных журналов. Ученые узнавали о трудах своих коллег или из книг, или из частных писем.

Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

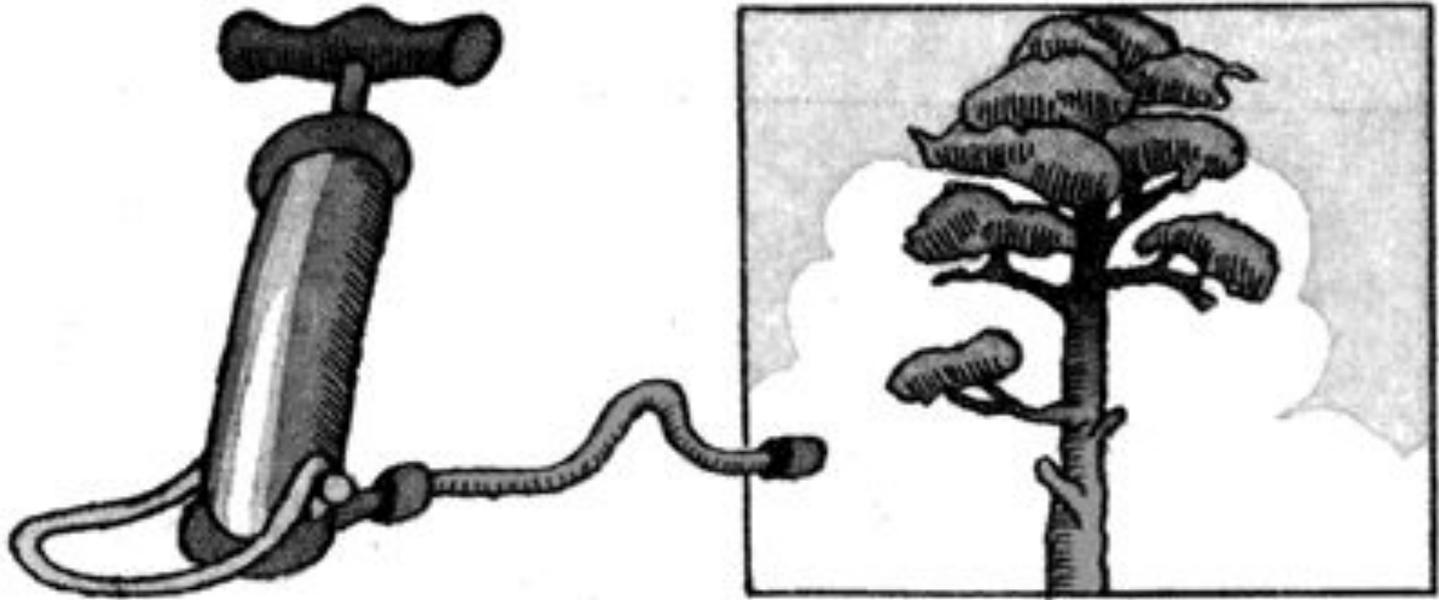


Харламова Ирина
Юрьевна

АРХИМЕД
(ок. 287 – 212 до н.э.)

09/16/2023

АНАГРАММЫ



НАСОС

СОСНА

Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

*ааааааа, ссссс, d,
еееее, g, h, іііііі, lll,
тт, пппппппппп,
оооо, рр, q, rr, s, ttttt,
иііііі.*

**Христиан Гюйгенс
(1629-1695)**

Харламова Ирина
Юрьевна



09/16/2023



«Окружен кольцом тонким,
«Anello singulū tenui, plano,
плоским, нигде не
подвешенным, наклонным к
экватору, параллельным
экватору»

Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

*ааааааа, ссссс, d,
еееее, g, h, іііііі, lll,
тт, нnnnnnnnnn,
оооо, рр, q, rr, s, ttttt,
иииии.*

**Христиан Гюйгенс
(1629-1695)**

Харламова Ирина
Юрьевна



09/16/2023

<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>l</i>	<i>m</i>
7	5	1	5	1	1	7	3	2
<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>всего</i>
9	4	2	1	2	1	5	5	61

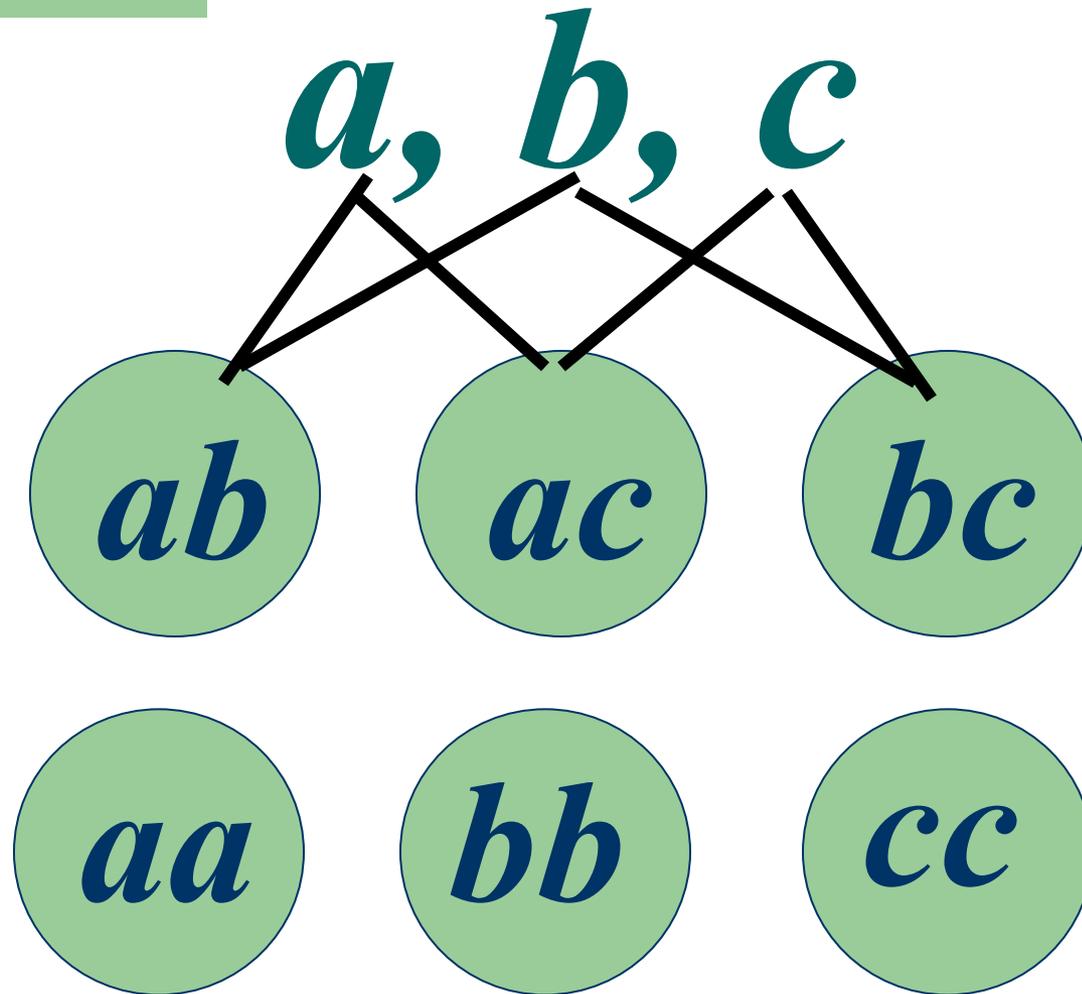
$$P(7,5,1,5,1,1,7,3,2,9,4,2,1,2,1,5,5) = ?$$

$$P(7,5,1,5,1,1,7,3,2,9,4,2,1,2,1,5,5) =$$
$$= \frac{61!}{7! \cdot 5! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 7! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 9! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 5!} =$$

$$\approx 10^{60}$$

Сочетания с повторениями из n элементов по k

- Сочетаниями с повторениями из n элементов по k называются такие выборки, которые, имея по k элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются друг от друга только составом элементов (порядок расположения элементов значения не имеет), причем один и тот же элемент может входить в выборку более одного раза.

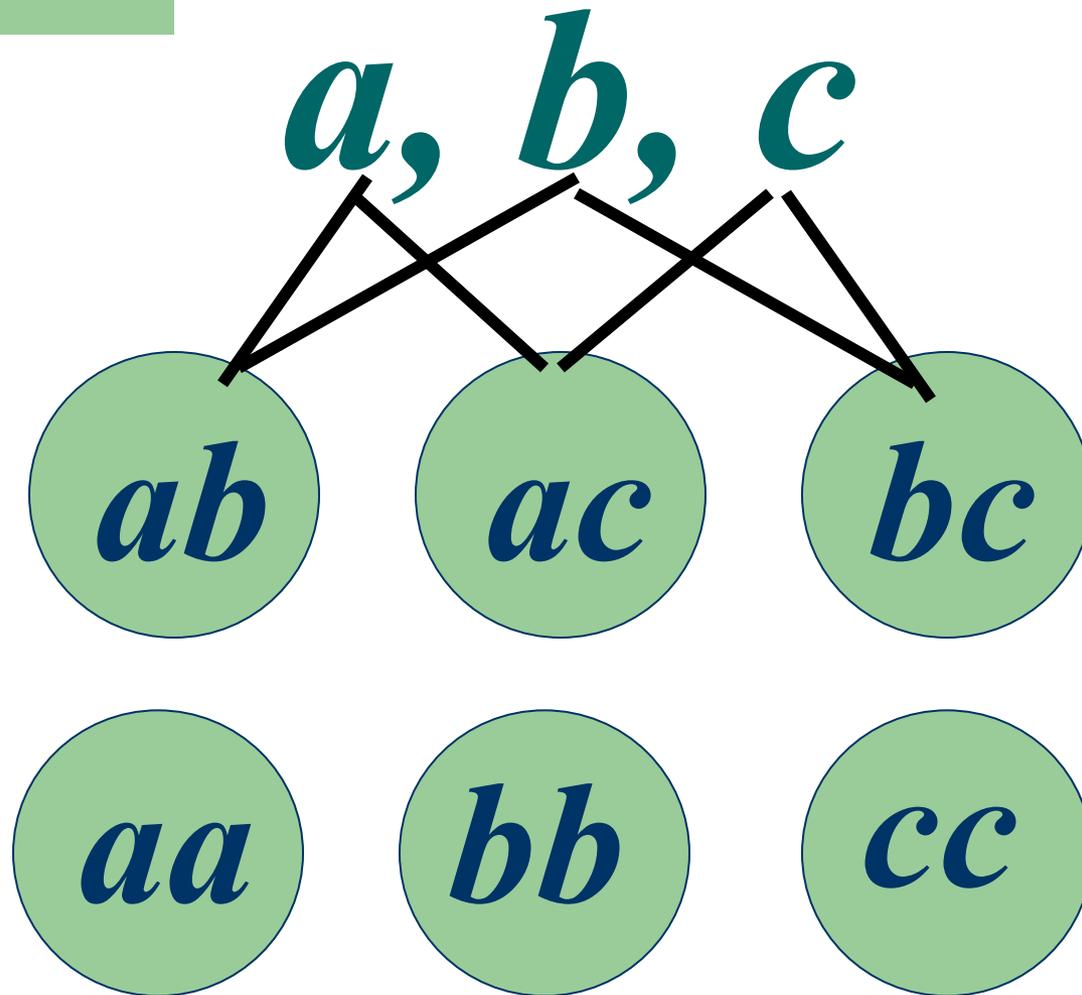


Число сочетаний с повторениями из n элементов по k

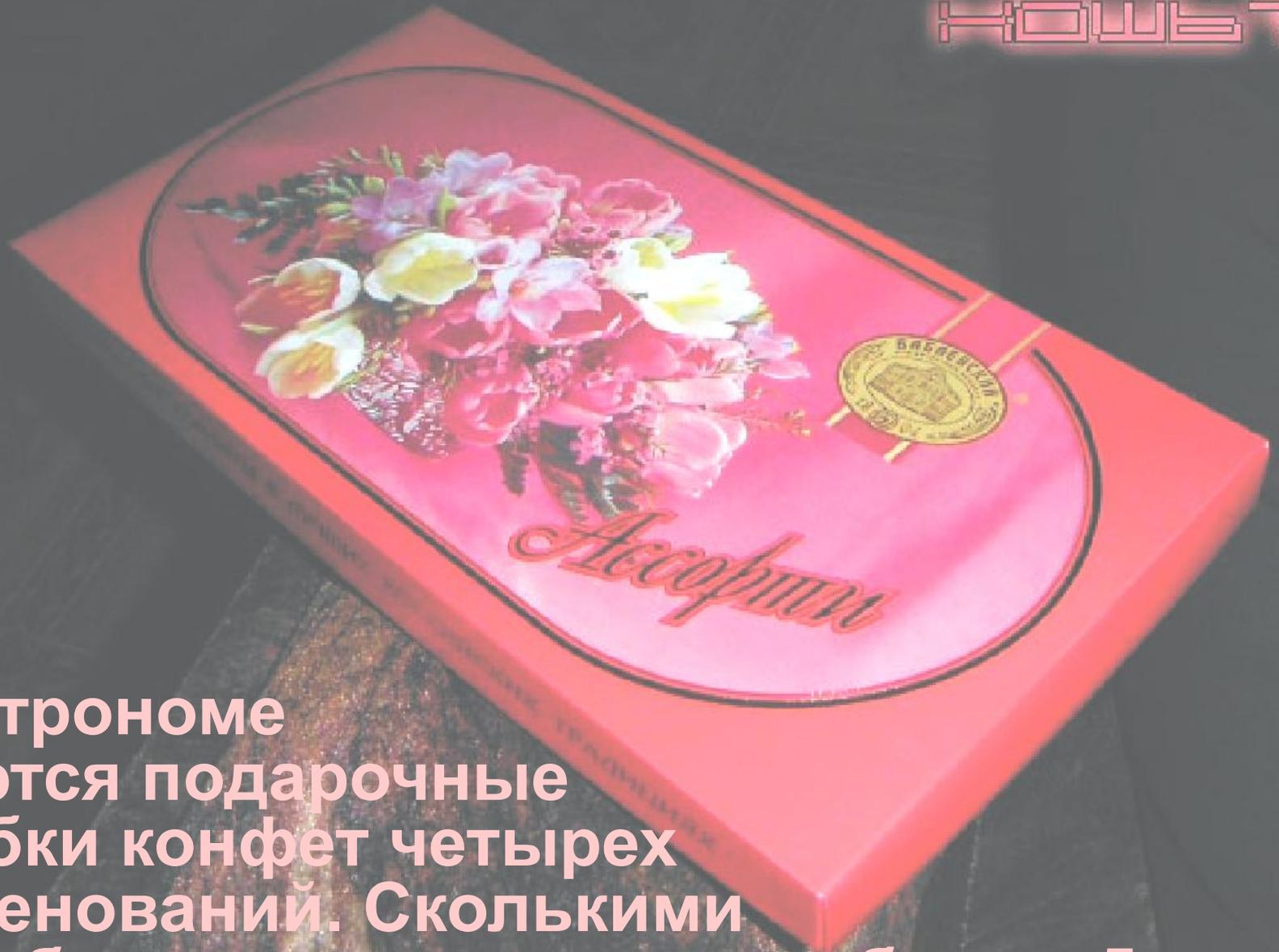
$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Число сочетаний с повторениями из 3 элементов по 2

$$\begin{aligned}\tilde{C}_3^2 &= C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \\ &= \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6\end{aligned}$$



КАК ЭТО
КОШЕ?



В гастрономе
имеются подарочные
коробки конфет четырех
наименований. Сколькими
способами можно заказать набор из 5 короб



Юрѣвна
ба кѣри

09/16/2023



Харламова Ирина
Юрьевна

09/16/2023

Число сочетаний с повторениями из 4 элементов по 5

$$\begin{aligned}\tilde{C}_4^5 &= C_{4+5-1}^5 = C_8^5 = \\ &= \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56\end{aligned}$$

Что с
чем
носит
ь



$$5 \times 7 = 35$$

арламова Ирина

Юрьевна

09/16/2023



Нет это не Рио-де-Жанейро

На босу ногу - круче, с носками (белыми спортивными) - гигиеничнее

Не ой. Но в Америке, например, так очень даже ходят

Идеально. Но только, пожалуйста, без носков!

Нарядно. А носков не надо. Ноги потом помоешь...

Либо на босу ногу, либо с белыми носками.

На босу ногу - очень стильно. С носками - очень по-любски работает. Если так уж хочется надеть сюда носки - то только темные.

Джинсы - вещь демократичная. Но не до такой же степени

Если носки, то только белые

С черными носками - однозначно. На босу ногу - есть шанс проколоться

Тоже подходит. (Носкам - бой!).

Лучше, если джинсы черные или темно-синие, с модными отворотами

С голубыми классическими джинсами - то, что надо. Носки белые или на босу

Темные, если брюки без отворотов. Без носков актуально, но не подделовому

Носки под цвет брюк, ремень - под цвет ботинок

В гробу мы видали такое сочетание

Носки под цвет костюма

Увольнение гарантировано

Слишком модно. В банке тебя точно не поймут

Мокасины с костюмом не носят. Даже настоящие индейцы.

Забудь об этом!

А галстук на голую грудь повязать?

На босу ногу или с белыми носками

Ну вы, батенька, оригинал!

На босу ногу, естественно

Самый писк. Особенно если шорты ниже колена и не спортивные. А пятки - ухоженные

Только на босу ногу

Забудь об этом!

Полегче на поворотах. Классические офисные брюки, черные брюки - подходят очень редко

Не годится, даже если шнурки погладишь

С черными носками - всегда пожалуйста

Ни в городе Богдан, ни в селе Селифан

Можно даже в клуб. Вместо носков - аккуратный педикюр

Ни в коем разе

С темными носками хорошо. Без носков - еще лучше

09/16/2013

**Число, положение
и комбинация - три
взаимно пересекающиеся,
но различные сферы мысли,
к которым можно отнести все
математические идеи.**

Дж. Сильвестр (1844 г.)