# Современные проблемы информатики

## Лекция 2

### Алгебра поведений

# Что такое поведение?
# (инвариант бисимуляционной эквивалентности)

В теории автоматов:

**Автомат** есть транзиционная система, размеченная парами вход/выход

**Поведение** есть автоматное отображение

Или

**Автомат** есть настроенная транзиционная система, размеченная входными символами

**Поведение** есть язык

1. **Domain theory approach** (S.Abramsky 1991)
2. **ACP with recursion** (J.A.Bergstra and J.W.Klop, 1984)
3. **Coalgebraic approach** (P.Aczel, 1988, later B.Jecobs and J.Rutten)
4. **Continuous algebras** (A.Letichevsky,D.Gilbert,1997)

# Алгебра поведений

- **Два сорта: <*U*, *A*>**
  - ***U* – поведения**
  - ***A* – действия**
- **Сигнатура:**
  - **префиксинг *a.u***
  - **недетерминированный выбор *u* + *v***
  - **константы** Δ, 0, ⊥
  - **отношение аппроксимации** $\sqsubseteq$
- **Аксиомы:**
  - **aci для недетерминированного выбора**
  - 0 **есть нейтральный элемент недетерминированного выбора**
  - $\sqsubseteq$ **есть отношение частичного порядка с наименьшим элементом** ⊥
  - **Обе операции монотонны и непрерывны (сохраняют наименьшие верхние грани)**

**Дополнительные структуры:**

Действия: комбинация действий × , невозможное и нейтральное действия

Атрибуты: функции на поведениях

# Монотонность

$$\bot \sqsubseteq u$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow u + w \sqsubseteq v + w$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow a.u \sqsubseteq a.v$$

# Непрерывность

Направленное множество

$$\forall(d', d'' \in D)\, \exists(d \in D)(d' \sqsubseteq d \wedge d'' \sqsubseteq d)$$

Наименьшая верхняя грань $\bigsqcup D, \bigsqcup_{d \in D} d$

Непрерывность

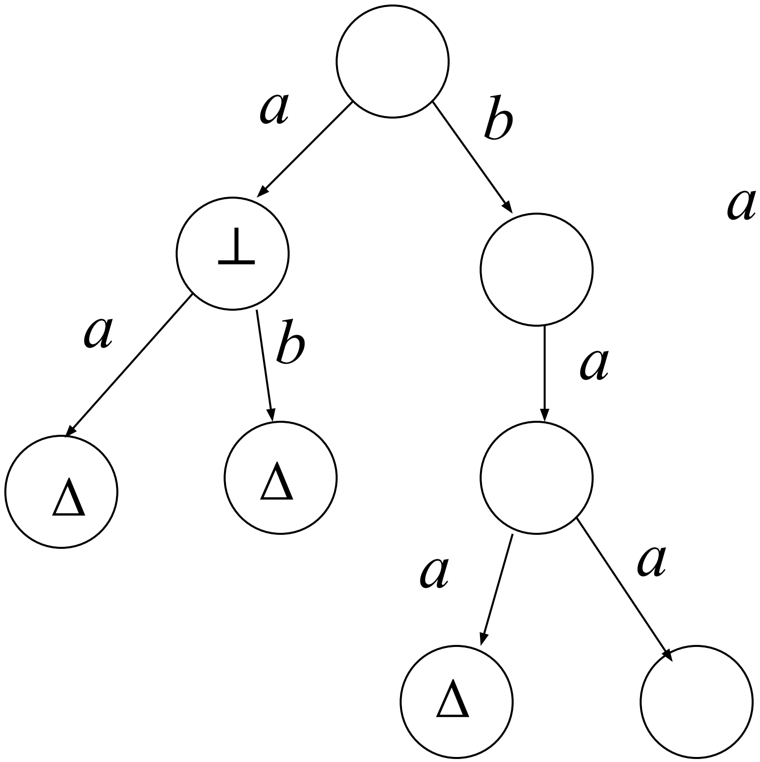
$$a.\bigsqcup D = \bigsqcup_{d \in D} a.d$$

$$u + \bigsqcup D = \bigsqcup_{d \in D} (u + d)$$

# Монотонность следует из непрерывности

$$x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup y = y \Rightarrow f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y) = f(y) \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

# Поведение есть элемент алгебры поведений




$a.(a+b+\perp)+b.a.(a+a.0)$

$a.\,\Delta = a$

# Как построить алгебру всех поведений произвольных систем над множеством действий *A*?

$$F_{fin}(A) \subset F_{fin}^{\infty}(A) \subset F(A)$$

**Алгебра конечных поведений**
**Алгебра поведений конечной высоты**
**Алгебра бесконечных поведений**

# Алгебра конечных поведений

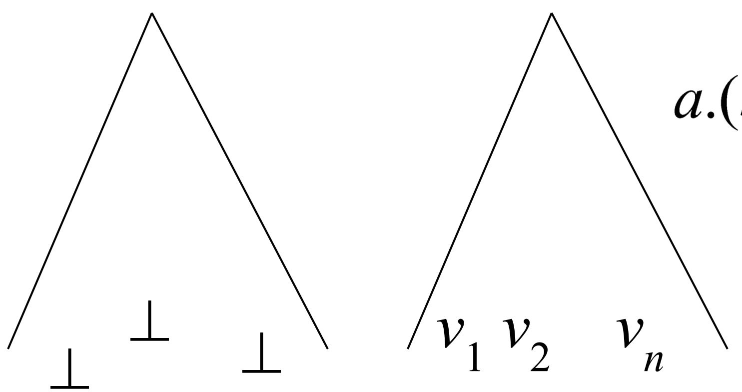
$$F_{fin}(A)$$

Порождается терминальными константами $0, \Delta, \perp$

Состоит из выражений в сигнатуре $+, (()\,.\,())$

Отношение аппроксимации:

$$u \sqsubseteq v \Leftrightarrow \exists \varphi(x_1,\ldots,x_n)\exists(v_1,\ldots,v_n)(u = \varphi(\perp,\ldots,\perp) \wedge v = \varphi(v_1,\ldots,v_n))$$




$$a.(b.\Delta + b.(\Delta + \perp)) \sqsubseteq a.(b.\Delta + b.(\Delta + c.\Delta))$$

# Каноническая форма

$$u = (\sum_{i \in I} a_i . u_i) + \varepsilon_u$$

$I$ – конечное множество индексов, $\varepsilon_u = 0, \Delta, \perp, \Delta + \perp$

$u$ сходится, если $\varepsilon_u = 0, \Delta$ и расходится в противном случае

**Если все $a_i . u_i$ различны и $u_i$ представлены в такой же форме, то представление $u$ единственно с точностью до коммутативности недетерминированного выбора.**

Индукция по высоте терма $h(u)$

$$h(\varepsilon) = 0, h(a.u) = h(u) + 1, h(u + v) = \max(h(u), h(v))$$

# Критерий аппроксимации

$u \sqsubseteq v \Leftrightarrow$

1. $\varepsilon_u \sqsubseteq \varepsilon_v$
2. $u = a.u' + u'' \Rightarrow v = a.v' + v'', u' \sqsubseteq v'$
3. $v = a.v' + v'',\ u\downarrow\ \Rightarrow u = a.u' + u'', u' \sqsubseteq v'$

Индукция по высоте $u$

# $F_{fin}(A)$ есть инициальная алгебра поведений

**Свободные алгебры поведений $F_{fin}(A,X)$**

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u = a.u'_m + u''_m \Rightarrow v = a.v'_m + v''_m \Rightarrow$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u = a.u'_k + u''_k \Rightarrow a.v'_k + v''_k$$

$$u = a.u'_m + u''_m \Rightarrow v = a.v'_m + v''_m \Rightarrow$$

$$u'_m \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq u'_k \sqsubseteq v'_k \sqsubseteq u'_m \Rightarrow$$

$$u'_m = v'_k, u''_m = v''_k \Rightarrow u = v$$

# Алгебра поведений конечной высоты

$$F^{\infty}_{fin}(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{(n)}$$

$$F^{(0)} = \{0, \Delta, \perp, \Delta + \perp\}$$

$$F^{(n+1)} = \{\sum_{i \in I} a_i . u_i + u' \mid u_i, u' \in F^{(n)}\}$$

$I$ произвольное множество (может быть пустое)

$$\sum_{i \in I} a_i . u_i = \sum_{j \in J} b_j . v_j \Leftrightarrow \{a_i . u_i \mid i \in I\} = \{b_j . v_j \mid j \in J\}$$

Критерий аппроксимации – определение. Операции:

$$(\sum_{i \in I} a_i . u_i + u') + (\sum_{j \in J} b_j . v_j + v') = \sum_{k \in I \cup J} c_k . w_k + (u' + v')$$

# Полная алгебра поведений $F(A)$

Элементы: классы эквивалентности направленных множеств поведений конечной высоты

$$U \sqsubseteq V \Leftrightarrow \forall(u \in U)\exists(v \in V)(u \sqsubseteq v)$$

$$U = V \Leftrightarrow U \sqsubseteq V \sqsubseteq U$$

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

$$a.U = \{a.u \mid u \in U\}$$

От классов к представителям.
Предел направленного множества направленных множеств = их объединение.
Бесконечные суммы:

$$\sum_{i \in I} u_i = \{\sum_{i \in I} v_i \mid v_i \in u_i\}$$

# Каноническая форма в алгебре $F(A)$

$$\boxed{u = (\sum_{i \in I} a_i . u_i) + \varepsilon_u}$$

$$\boxed{u = \sum_{\exists w(u = a.v + w)} a.v + \varepsilon_u}$$

$$M_u(a) = \{(x, y) \mid a.x + y = u\}$$

$$S_u(a) = \{x \mid \exists y (x, y) \in M_u(a)\} = \{x \mid \exists y (a.x + y = u))\}$$

$$I = \{(a, v) \mid v \in S_u(a)\}$$

$$a_{(a,v)} = a, u_{(a,v)} = v$$

Такое представление единственно, если все $a_i . u_i$ различны

# Теорема о неподвижной точке

Добавление переменных: $F^{\infty}_{fin}(A, X)$

$$x_i = F_i(X), i \in I,$$

$$F_i(X) \in F^{\infty}_{fin}(A, X)$$

$$x_i = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} x_i^{(n)},$$

$$x_i^{(0)} = \perp,$$

$$x_i^{(n+1)} = (F_i(X))\sigma_n,$$

$$\sigma_{n+1} = \{x_i := x_i^{(n)} \mid i \in I\}$$

**Следующая лекция**

# Поведение транзиционных систем

**Транзиционная система => поведение => транзиционная система**