

Различные подходы к построению теории действительных чисел

Подготовила:

студентка 5 курса

Платошина Татьяна Сергеевна

Научный руководитель:

к.п.н., доцент Воробьева Н.Г.

Цели :

- 1. Рассмотреть различные подходы к построению теории действительных чисел, свойства действительных чисел и ту роль, которую они сыграли в развитии математики.

Задачи:

- Проанализировать построение множества действительных чисел в историческом аспекте.
- Рассмотреть подходы к построению теории действительных чисел по Кантору, Вейерштрассу, Дедекинду.
- Выделить подходы к построению действительных чисел в школьном курсе математики.



"Всё есть число"

Пифагор



**"Мы никогда не стали бы
разумными,
если бы исключили число из
человеческой природы"**

Платон

Развитие теории действительных чисел по Кантору



Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор- немецкий математик (3 марта 1845, Санкт-Петербург — 6 января 1918, Галле (Заале))

Его научная деятельность:

- Диссертация 1867 г. «О неопределенных уравнениях второй степени»
- Работа «О преобразовании тернарных квадратичных форм»
- В 1895—1897г издана работа «К обоснованию учения о трансфинитных множествах»
- Занимался математикой , философией, теорией множеств.
- Ввел понятие взаимно-однозначного соответствия между элементами множеств, дал определения бесконечного и вполне-упорядоченного множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных, ввел понятие кардинальных и порядковых чисел и их арифметику, рассмотрел теорию о трансфинитных числах

Теория действительных чисел по Кантору



- Основной шаг, который делает Кантор в построении теории вещественного числа заключается в том, что он рассматривает всякую последовательность рациональных чисел, удовлетворяющую условию Коши как определяющую некоторое вещественное число.
- Две фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ могут определять одно и то же вещественное число. Это имеет место при условии

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |a_n - b_n| < \varepsilon$$

- Таким образом, на множестве всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел устанавливается отношение эквивалентности, и в соответствии с общим принципом все фундаментальные последовательности разбиваются на классы эквивалентности. Смысл этого разбиения таков, что последовательности из одного класса определяют одно и то же вещественное число, а последовательности из разных — разные. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между вещественными числами, и классам фундаментальных последовательностей рациональных чисел.



Теперь мы можем сформулировать основное определение теории вещественных чисел Кантора.

- **Вещественное число** есть класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел.
- Из определения вытекает, что всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел сходится к некоторому вещественному числу. Этот принцип лежал в основе определения вещественного числа.
- множество вещественных чисел содержит пределы всех фундаментальных последовательностей своих элементов. Это свойство множества вещественных чисел называется полнотой.

Развитие теории действительных чисел по Вейерштрассу



- **Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс** (31 октября 1815 — 19 февраля 1897) — выдающийся немецкий математик, «отец современного анализа».
- Исследования Вейерштрасса существенно обогатили математический анализ, теорию специальных функций, вариационное исчисление, дифференциальную геометрию и линейную алгебру.
- Он сформулировал логическое обоснование анализа на основе построенной им теории действительных (вещественных) чисел и так называемого ε - δ -языка он строго определил на этом языке понятие непрерывности.
- он дал строгое доказательство основных свойств непрерывных функций, предела, сходимости ряда и равномерной сходимости функций.

Теория действительных чисел по Вейерштрассу.

- В основе теории вещественного числа используется предположение, что всякая десятичная дробь является разложением некоторого, рационального или иррационального, вещественного числа α :

$$\alpha \approx \pm a_0, a_1, a_2, \dots a_n \dots$$

- **Действительным числом** называется десятичный ряд вида :

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

- где a_0 -любое целое число, а числитель a_i -целые числа, ограниченные соотношением $0 \leq a_i \leq 9$
т. е использоваться могут все цифры, причем исключено повторение 0 бесконечное множество раз.

Основная теорема, характеризующая непрерывность множества действительных чисел

Если имеются два множества R_1 и R_2 рациональных чисел, обладающих двумя свойствами:

- Каждое число множества R_1 не больше каждого числа множества R_2
 - Для любого данного положительного действительного числа ε найдутся числа q в множестве R_2 и p в множестве R_1 такие, что $q - p < \varepsilon$
- то можно сконструировать действительное число A и притом единственное, которое не меньше каждого числа множества R_1 и не больше каждого числа множества R_2

Развитие теории действительных чисел по Дедекинду



- Юлиус Вильгельм Рихард Дедекінд (6 октября 1831 — 12 февраля 1916) — немецкий математик.
- В 1852 году Дедекинд получает докторскую степень за работу над диссертацией по теории интегралов Эйлера.
- Ввел в математику в самом общем виде теоретико-множественное понятие отображения.
- В 1872 году выходит его первая работа «Непрерывность и иррациональность».
- В 1887 выходит вторая работа «Что такое числа и для чего они служат?».

Теория действительных чисел по Дедекинду

Сечением Дедекинда в поле рациональных чисел называется разбиение всего множества рациональных чисел на два непустых подмножества так, что

- каждое число, вошедшее в первое подмножество, меньше каждого числа, вошедшего во второе подмножество.
- каждое рациональное число должно входить в одно из этих двух подмножеств.

Рассмотрим три вида сечений Дедекинда.

- Первый вид, когда в первом подмножестве есть наибольшее число, а во втором нет наименьшего числа, что будем передавать в виде $(R_1; R_2) = [r_1; \bar{r}_1)$, где r_1 - есть последнее в подмножестве R_1 .



- Второй вид сечения, когда в первом подмножестве нет наибольшего числа, а во втором есть наименьшее число ($R_1; R_2$) = r , где r - наименьшее из R_2
- Третий вид сечения: когда в первом подмножестве нет наибольшего числа, а во втором подмножестве нет наименьшего числа.
- **Действительным числом** называется любое из трех видов сечений Дедекинда в поле рациональных чисел.
- **Иррациональным числом** называется действительное число, определяемое сечением Дедекинда в поле рациональных чисел только третьего вида.

Спасибо за внимание!