Тема: «Преобразование графиков функции»

Цели:

1) Систематизировать приемы построения графиков.

2) Показать их применение при построении:

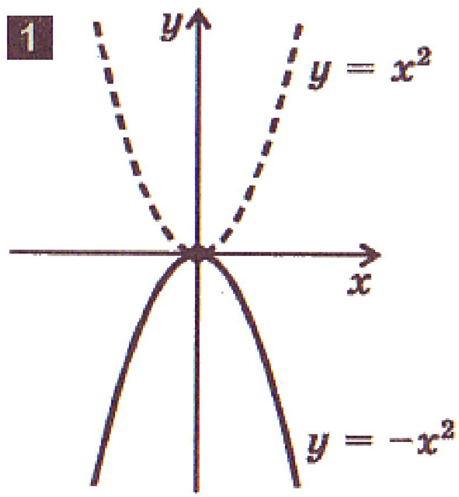
   а) графиков сложных функций;

   б) при решении заданий ЕГЭ из части С.

Рассмотрим основные правила преобразования графиков на примерах элементарных функций

1) Преобразование симметрии относительно оси x
f(x)□-f(x)

Примеры:



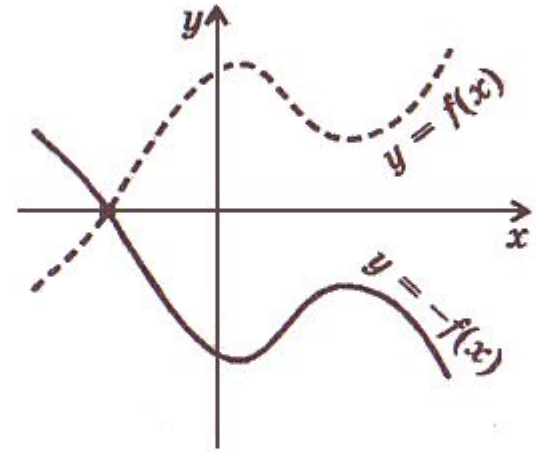
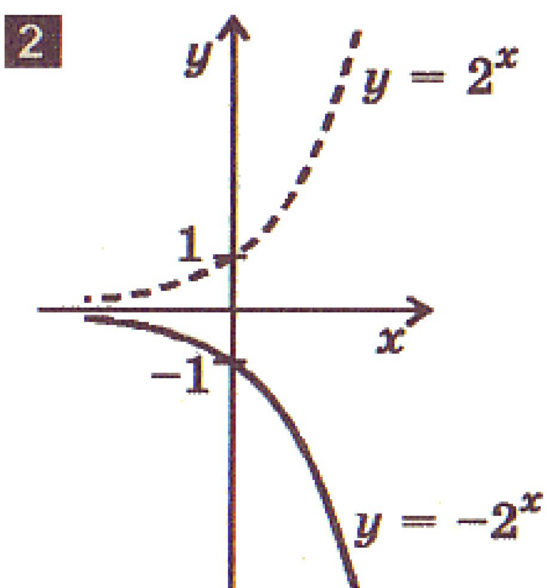
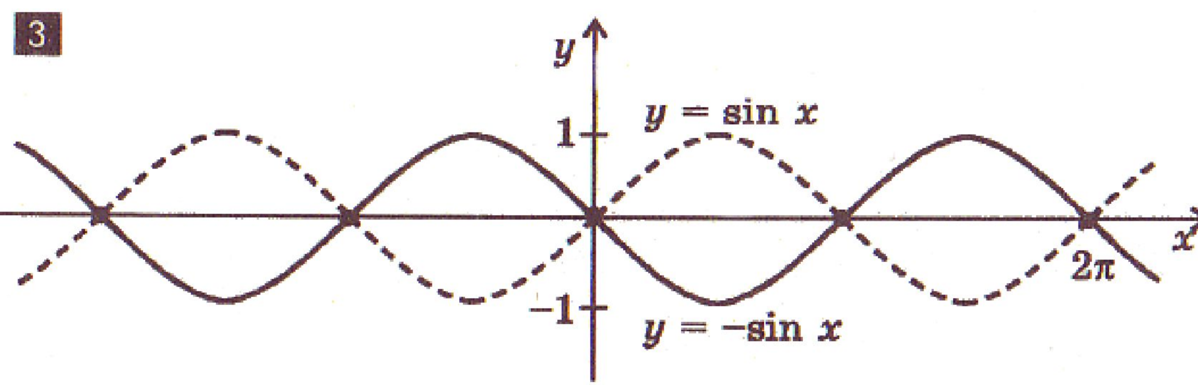


График функции y=-f(x) получается преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно оси x.

***Замечание.** Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.*





2) Преобразование симметрии относительно оси y
f(x)□f(-x)

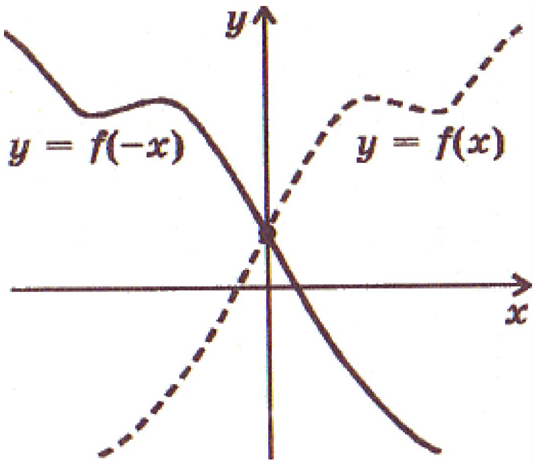


График функции y=f(-x) получается преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно оси y.

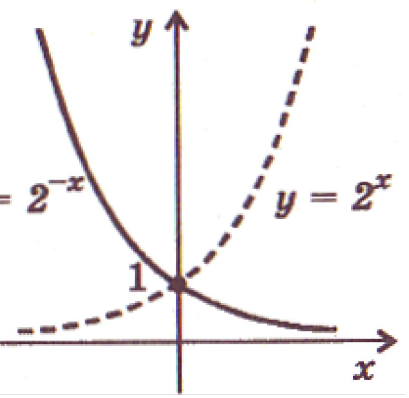
Замечание. Точка пересечения графика с осью y остается неизменной.

Замечание 1. График четной функции не изменяется при отражении относительно оси y, поскольку для четной функции f(-x)=f(x). ***Пример:*** $(-x)^2=x^2$

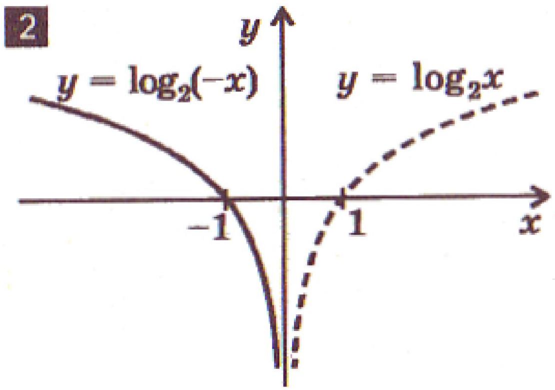
Замечание 2. График нечетной функции изменяется одинаково как при отражении относительно оси x, так и при отражении относительно оси y, посольку для нечетной функции f(-x)=-f(x). ***Пример:*** sin(-x)=-sinx.

Примеры:

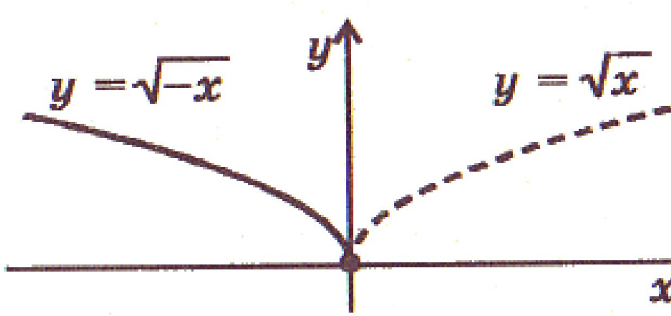
1



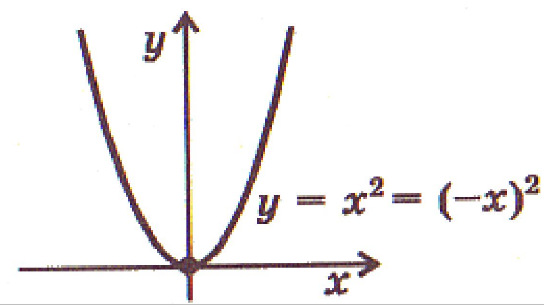
2



3

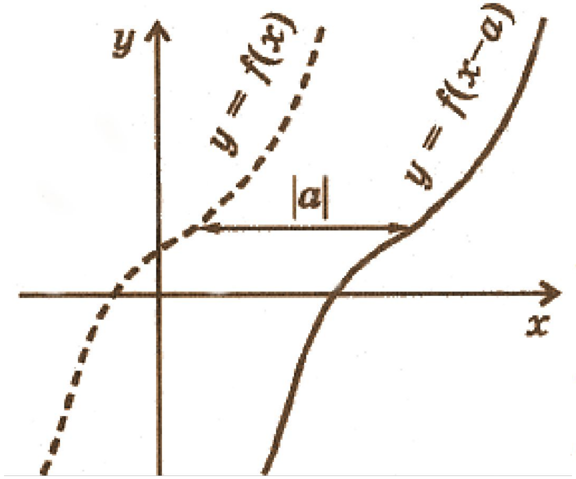


4

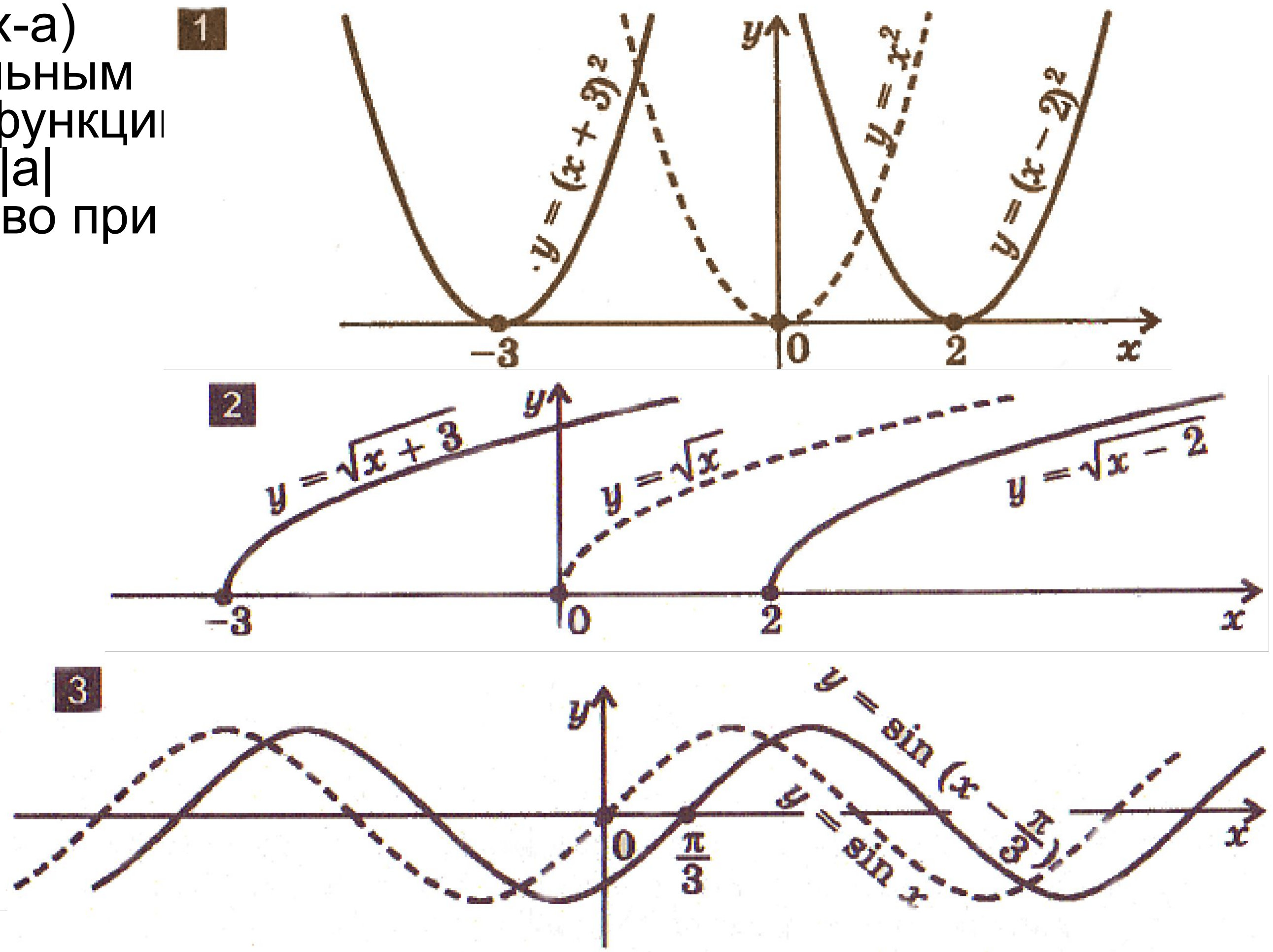


3) Параллельный перенос вдоль оси x
f(x)→**f(x-a)**

График функции y=f(x-a) получается параллельным переносом графика функции y=f(x) вдоль оси x на |a| вправо при a>0 и влево при a<0.



Примеры:



Замечание. График периодической функции с периодом T не изменяется при параллельных переносах вдоль оси x на nT, n∈Z.

4) Параллельный перенос вдоль оси y
f(x)→f(x)+b

Примеры:

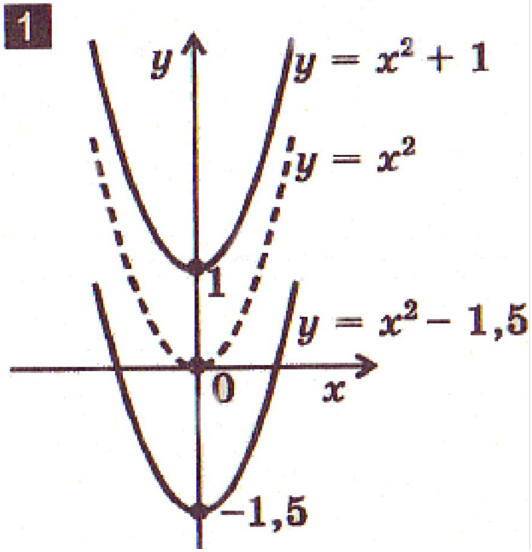
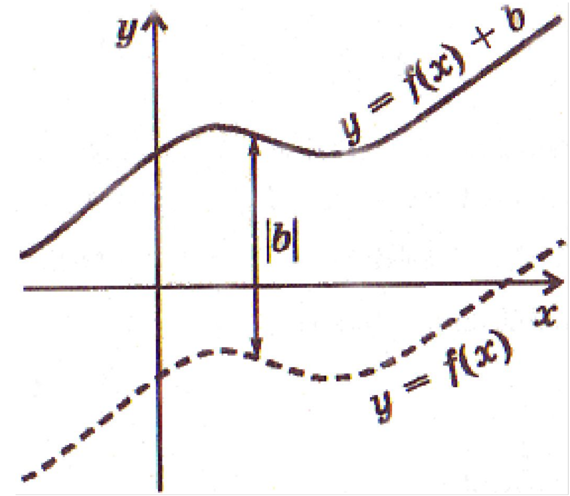
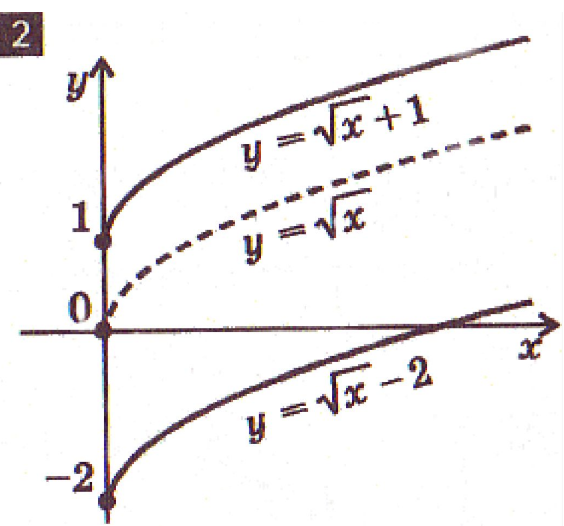
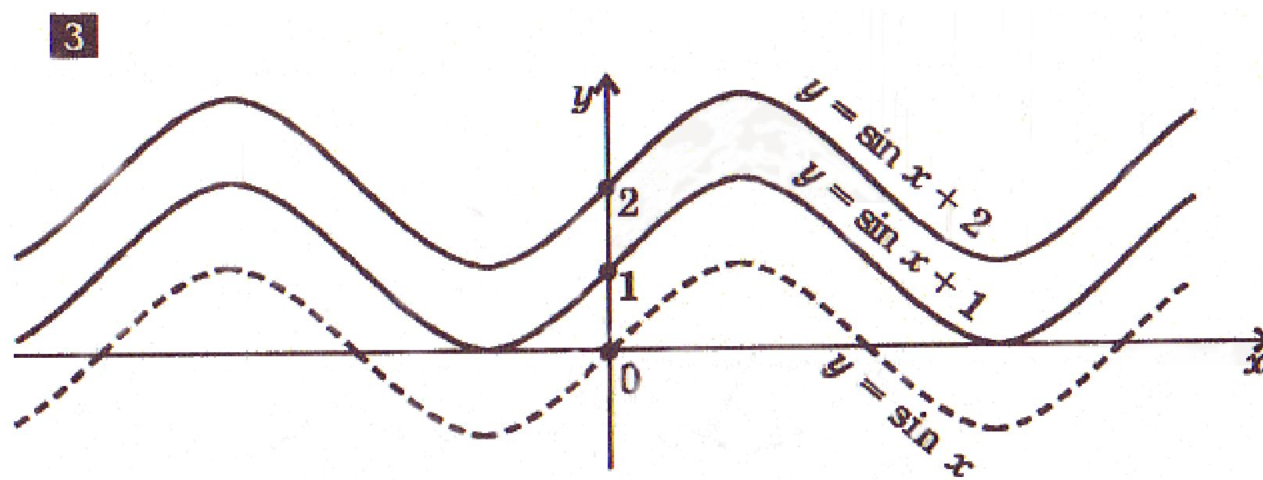


График функции y=f(x)+b получается параллельным переносом графика функции y=f(x) вдоль оси y на |b| вверх при b>0 и вниз при b<0.



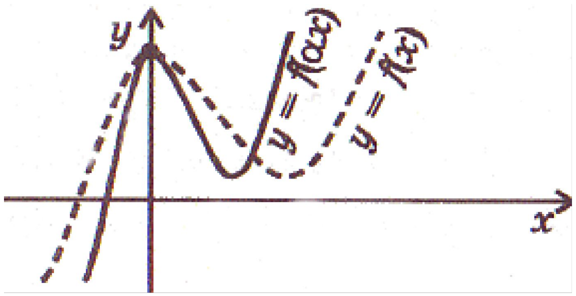




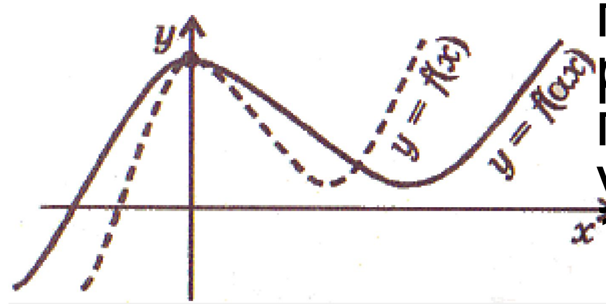
5) Сжатие и растяжение вдоль оси x

f(x)□f(αx), где α>0

$\alpha > 1$



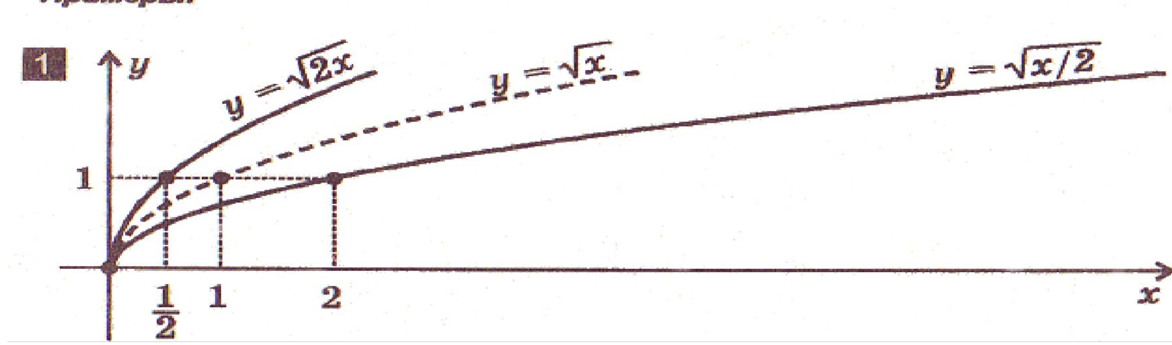
$0 < \alpha < 1$

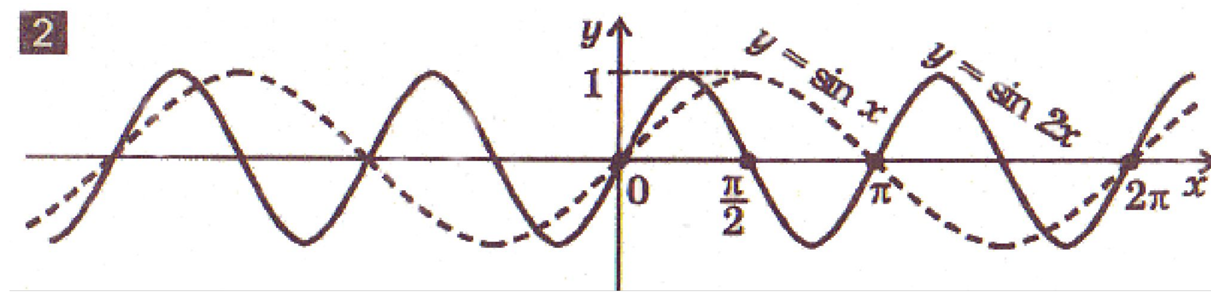


0<α<1 График функции y=f(αx) получается растяжением графика функции y=f(x) вдоль оси x в 1/α раз.

α>1 График функции y=a(αx) получается сжатием графика функции y=f(x) вдоль оси x в α раз.

Примеры:

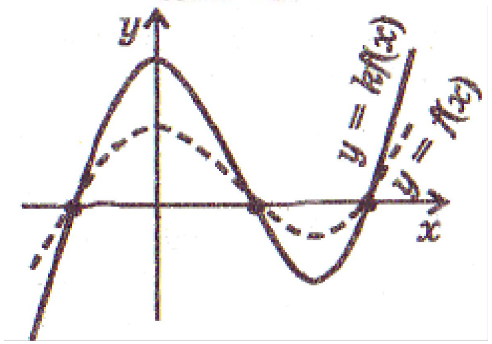




Замечание. Точки с пересечения графика с осью y остаются неизменными.

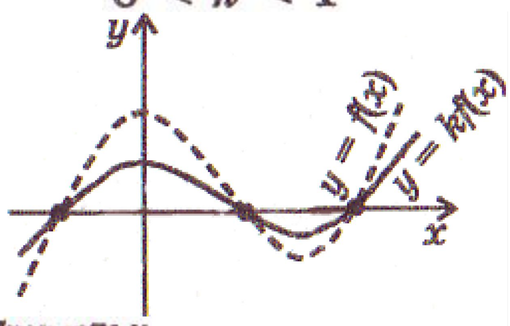
6) Сжатие и растяжение вдоль оси у
f(x)□kf(x), где k>0

$k > 1$



k>1 График функции y=kf(x) получается растяжением графика функции y=f(x) вдоль оси у в k раз.

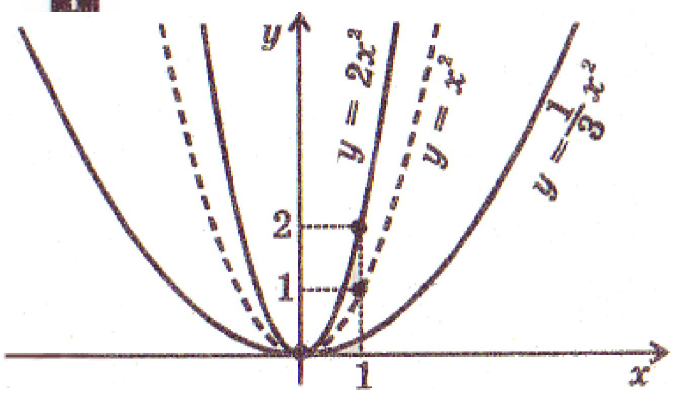
$0 < k < 1$

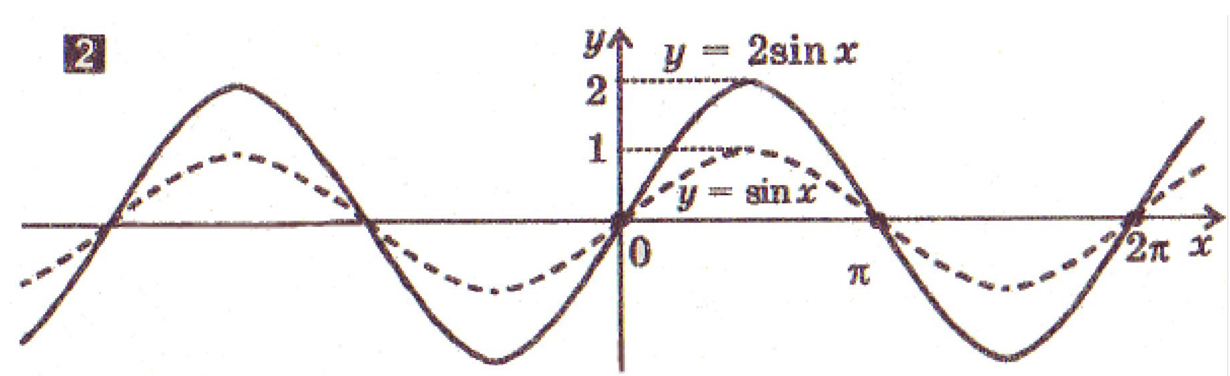


0<k<1 График функции y=kf(x) получается сжатием графика функции y=f(x) вдоль оси у в 1/k раз.

Примеры:

1





Замечание. Точки пересечения графика с осью х остаются неизменными.

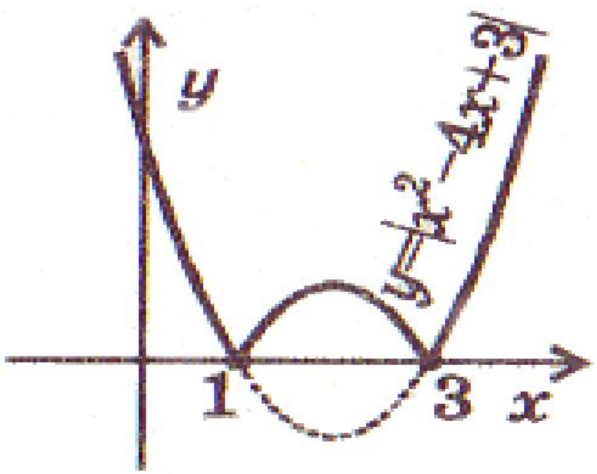
7) Построение графика функции y=|f(x)|

Части графика функции y=f(x), лежащие выше оси x и на оси x, остаются без изменения, а лежащие ниже оси x – симметрично отображаются относительно этой оси (вверх).

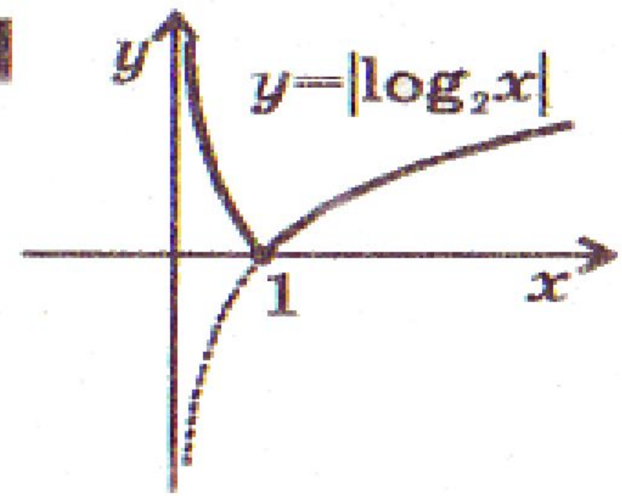
Замечание. Функция y=|f(x)| неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

Примеры:

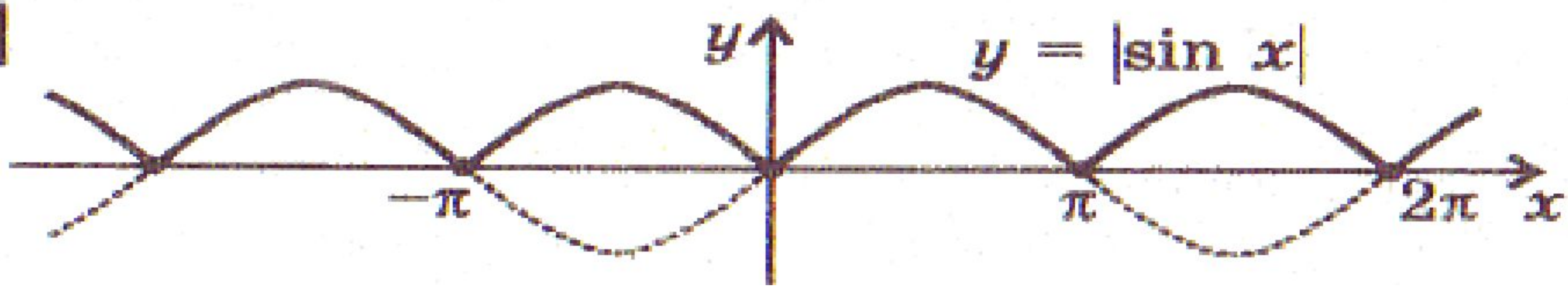
1



2



3



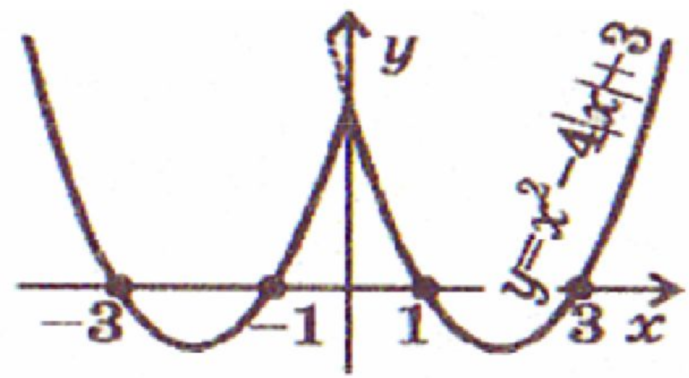
8) Построение графика функции y=f(|x|)

Часть графика функции y=f(x), лежащая левее оси y, удаляется, а часть, лежащая правее оси y – остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика лежащая на оси y, остается неизменной.

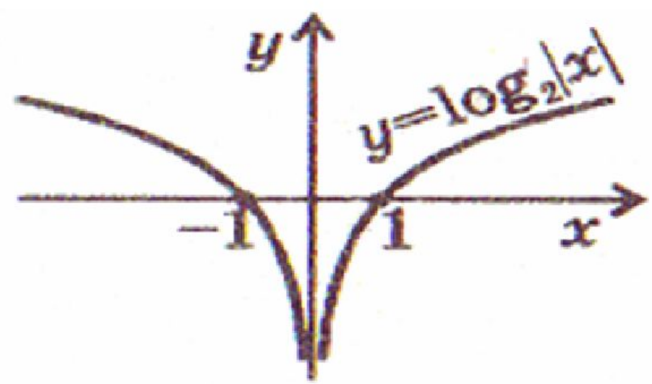
Замечание. Функция y=f(|x|) четная (ее график симметричен относительно оси y).

Примеры:

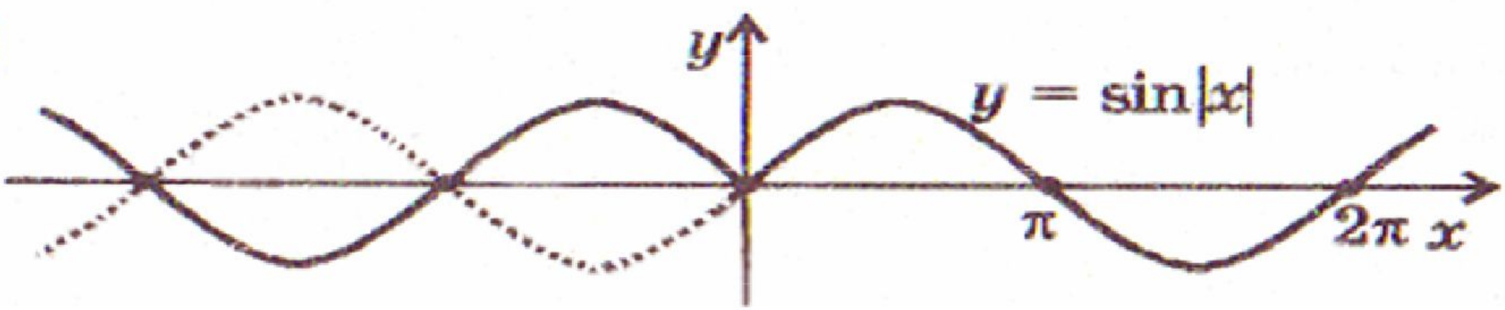
1



2



3



9) Построение графика обратной функции

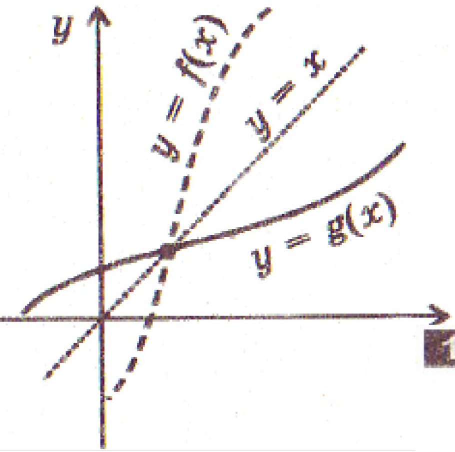
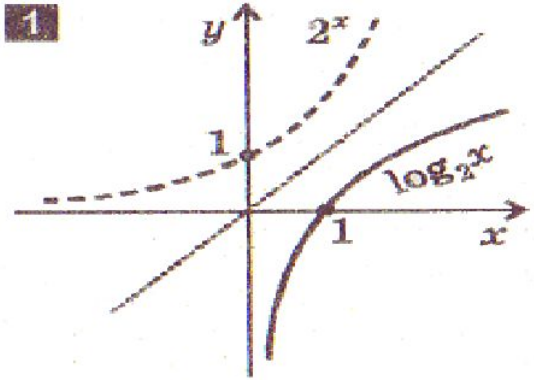


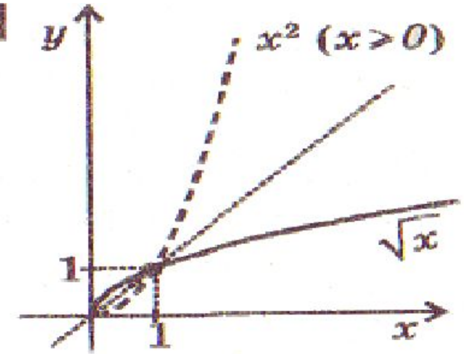
График функции y=*g*(x), обратной функции y=f(x), можно получить преобразованием симметрии графика функции y=f(x) относительно прямой y=x.

Замечание. Описанное построение производить только для функции, имеющей обратную.

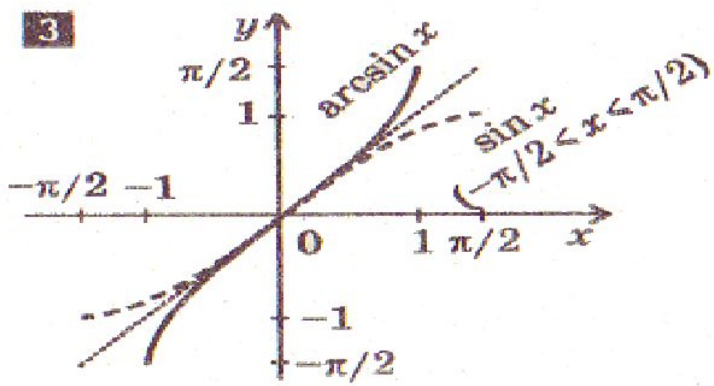
1



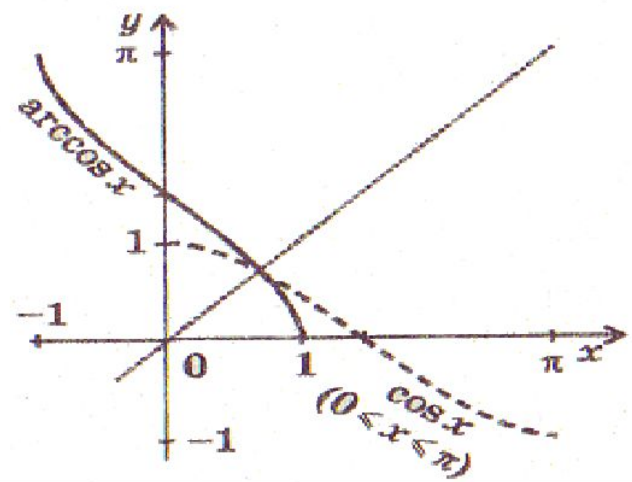
2



3



4

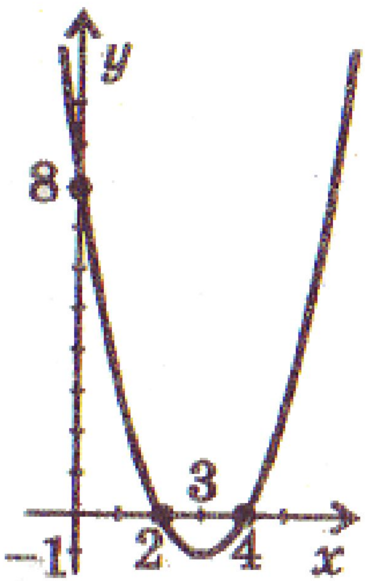


Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

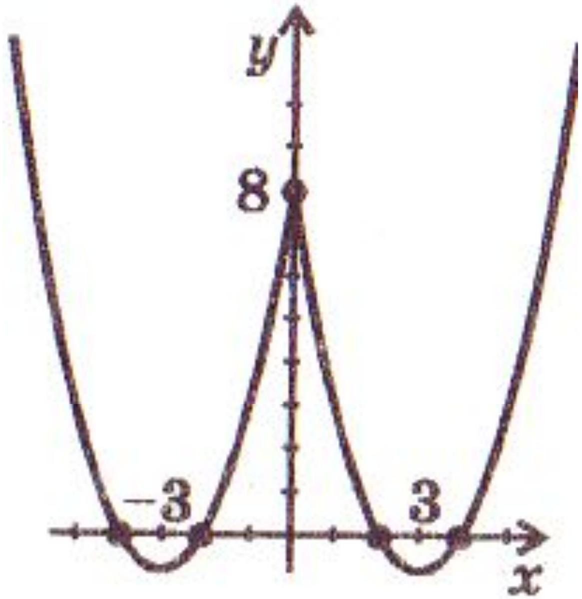
Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y=|x^2-6|x|+8|=||x|^2-6|x|+8|=|(|x|-3)^2-1|$$

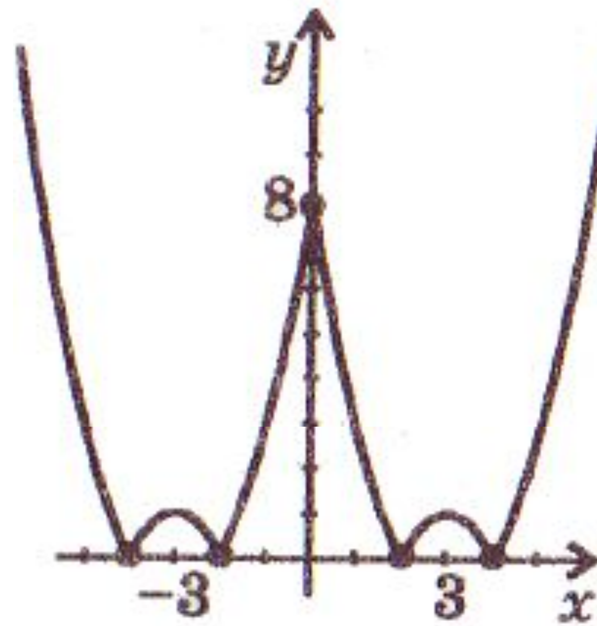
$$y = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$$



$$y = (|x| - 3)^2 - 1$$



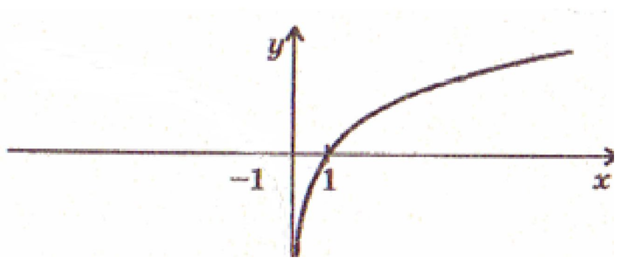
$$y = |(|x| - 3)^2 - 1|$$



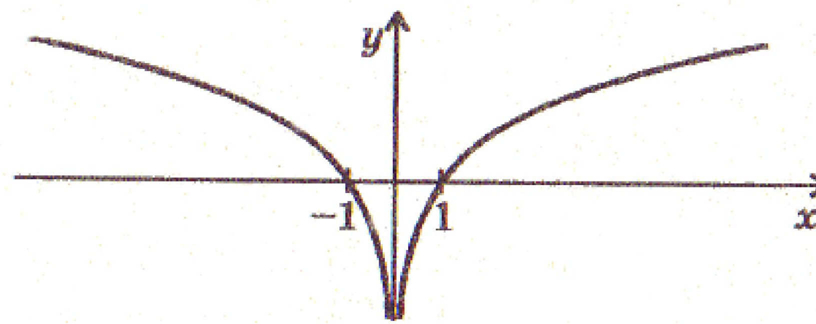
Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y = |\log_2(|x-1|)|$$

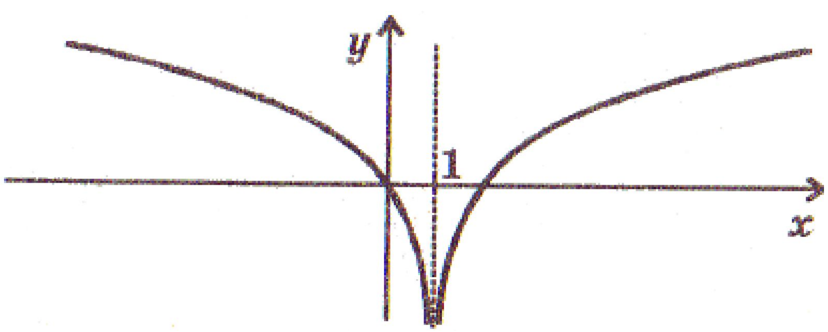
$y = \log_2 x$



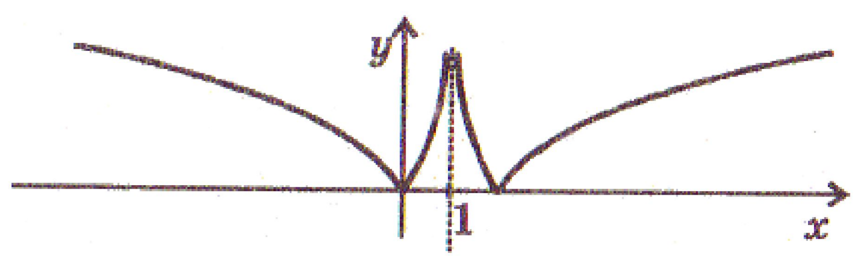
$y = \log_2|x|$



$y = \log_2(|x-1|)$

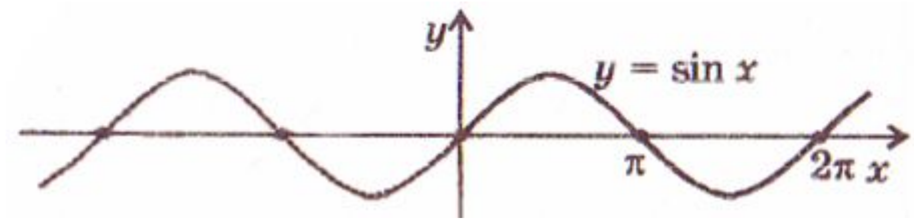


$y = |\log_2(|x-1|)|$

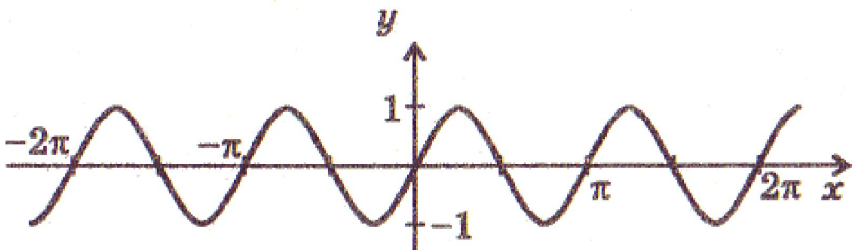


Построение графиков сложных функций с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

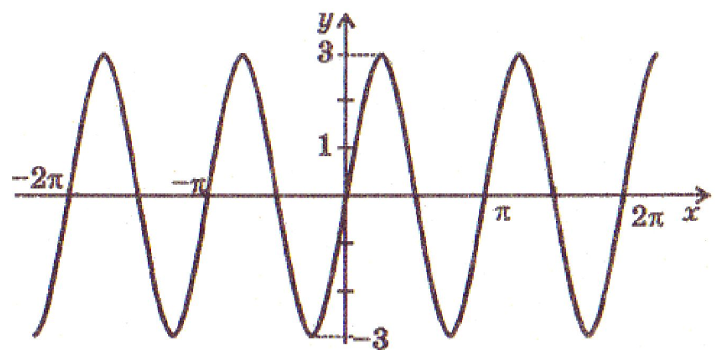
$y = |3\sin 2x| - 1$



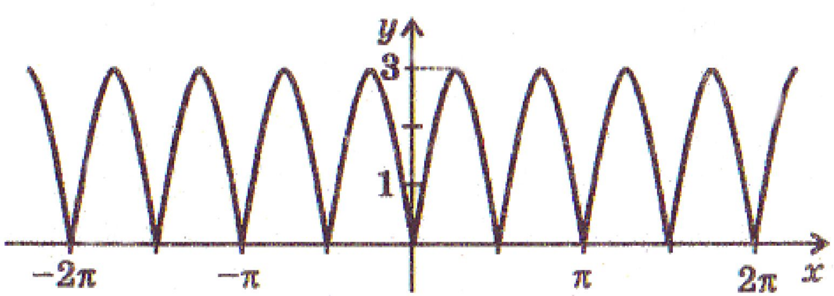
$y = \sin 2x$



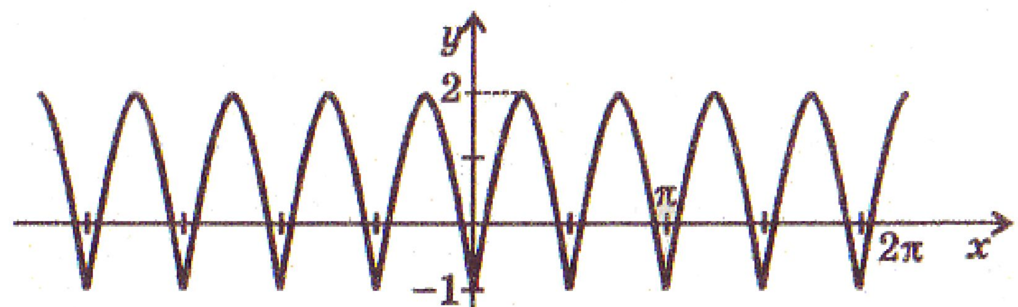
$y = 3\sin 2x$



$y = |3\sin 2x|$



$y = |3\sin 2x| - 1$



Применение правил преобразования графиков при решении заданий ЕГЭ (части С).

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^{x-1} - y = 0 \\ |x-4| + 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5^{x-1} \\ y = |x-4| + 3 \end{cases}$$

В одной системе координат, построим графики функций: а) $y = 5^{x-1}$

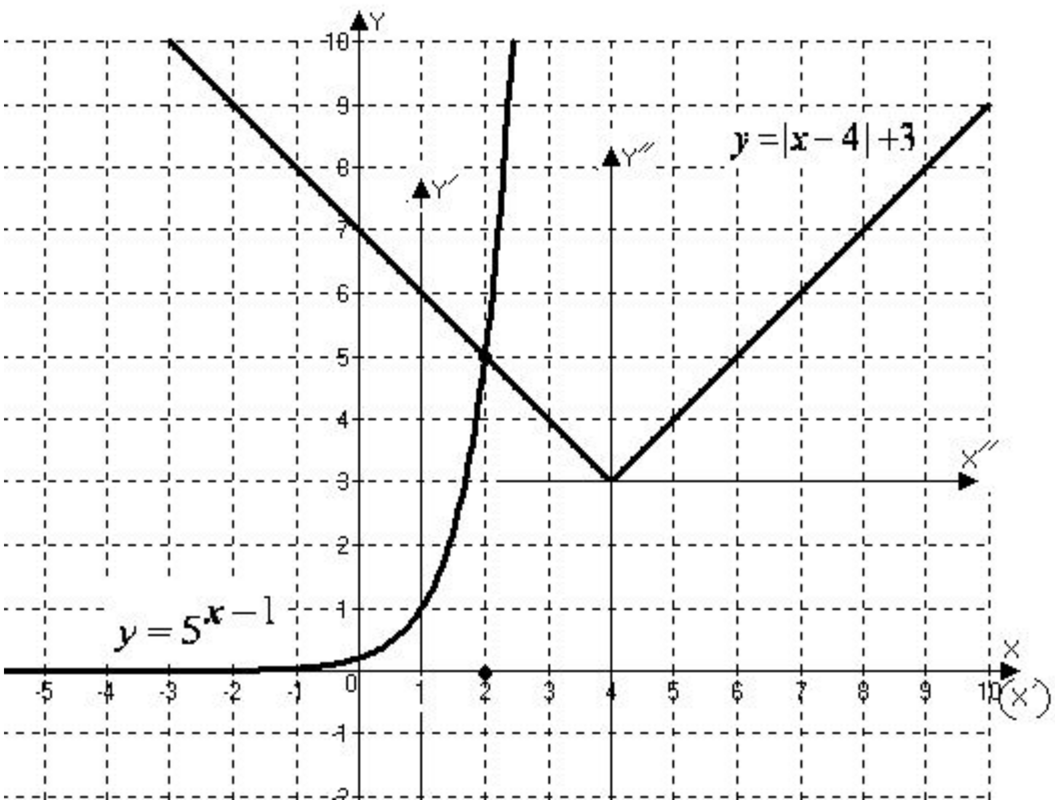
График этой функции получается в результате построения графика $y = 5^x$

в новой системе координат x'o'y', где O'(1;0)

$y = 5^x$

X	-1	0	1	2
Y	0,2	1	5	25

б) $y = |x-4| + 3$ В системе x''o''y'', где o''(4;3) построим график y=|x|.



Решением системы являются координаты точки пересечения графиков $y = 5^{x-1}$ и $y = |x-4| + 3$,

Пара чисел: $\underset{x}{(2};\underset{y}{5)}$.

Проверка:

$$\begin{cases} 5^{2-1} - 5 = 0 \\ |2-4| + 3 = 5 \end{cases}$$

(верно)

(верно)

Ответ: (2;5).

Решить уравнение: **f(g(x))+g(f(x))=32,** если известно, что

$$f(x)=0,5x^2-2x+12 \text{ и } g(x)=\begin{cases}20, & \text{при } x\ge 5\\ 0,5\cdot 2^x+\dfrac{8}{6-x} & \text{при } x<5.\end{cases}$$

Решение: Преобразуем функцию f(x). $f(x)=0,5(x^2-4x+4)+10$

$f(x)=0,5(x-2)^2+10$

Так как $0,5(x-2)^2\ge 0$, то $f(x)\ge 10$

Тогда g(f(x))=20.

Подставим в уравнение f(g(x))+g(f(x))=32, получим f(g(x))+20=32;

f(g(x))=12

Пусть g(x)=t, тогда f(t)=12 или

$0,5t^2-2t+12=12$ $\quad 0,5t^2-2t=0$ $\quad t^2-4t=0$ $\quad t(t-4)=0$ $\quad t=0$ или $t=4$

Имеем: g(x)=0 или g(x)=4

Так как при x≥5 g(x)=20, то решения уравнений: g(x)=0 и g(x)=4 будем искать среди x<5.

Тогда: а) Уравнение g(x)=0 примет вид:

$$0,5\cdot 2^x+\frac{8}{6-x}=0 \quad |\cdot 2 \Rightarrow 2^x+\frac{16}{6-x}=0$$

Так как x<5, то 6-x>0

$$\frac{16}{6-x}>0 \Rightarrow 2^x+\frac{16}{6-x}>0$$

Вывод: уравнение g(x)=0 не имеет корней.

б) уравнение g(x)=4 примет вид:

$$0,5\cdot 2^x+\frac{8}{6-x}=4 \Rightarrow \frac{1}{2}2^x=4-\frac{8}{6-x} \Rightarrow 2^{x-1}=\frac{8}{x-6}+4$$

В одной системе координат построим графики функций $y=2^{x-1}$ и $y=\dfrac{8}{x-6}+4$

а) $y = 2^{x-1}$

График данной функции получается построением графика $y = 2^x$

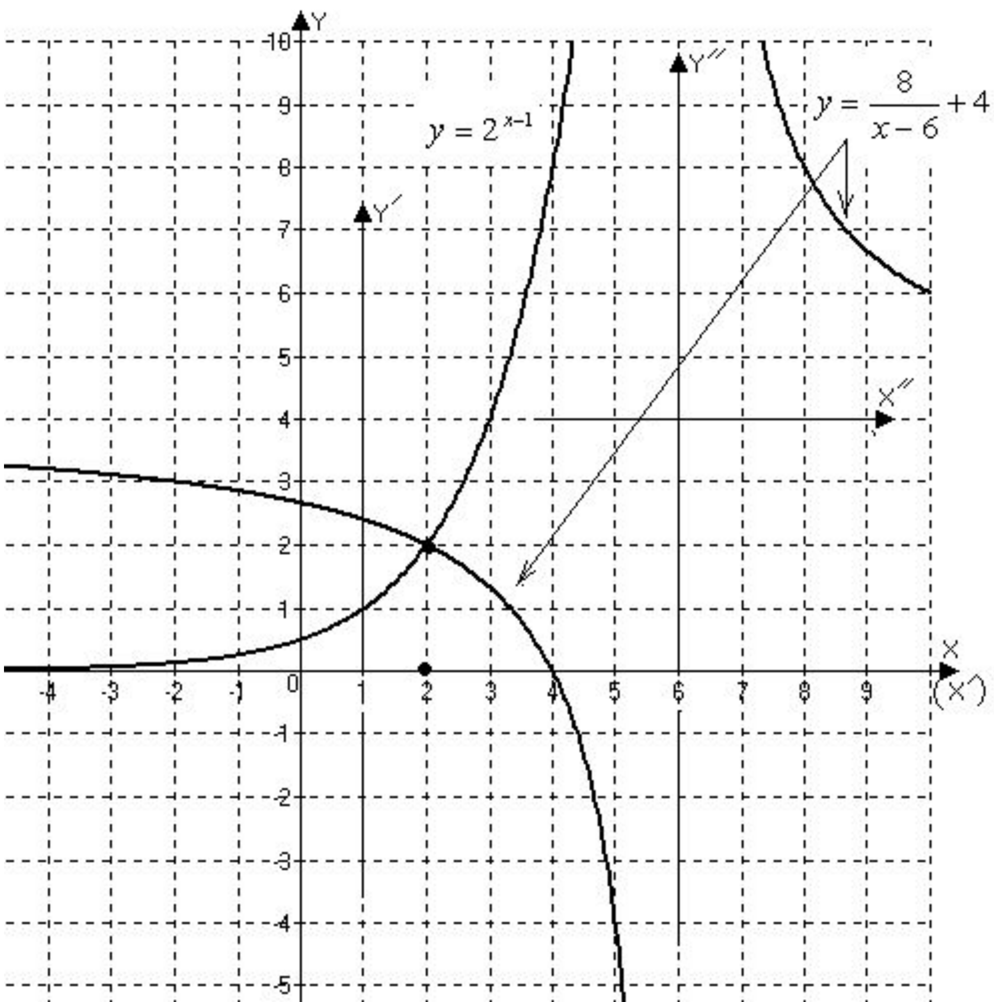
В системе x’o’y’, где o’(1;0).

X	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

б) $y = \dfrac{8}{x-6} + 4$

В системе x”o”y”, где o”(6;4), построим график функции $y = \dfrac{8}{x}$

$(x \neq 0)$



X	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
Y	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1

Условию x<5 удовлетворяет абсцисса общей точки графиков x=2.
Ответ: 2.

Вывод:

Мы видим, что правила преобразования графиков существенно упрощают построение графиков сложных функций.

Помогают найти нетрадиционное решение сложных задач.

Тема: «Преобразование графиков функции»