

Аппроксимация функций

(продолжение)

Многочлен Лагранжа.

Перейдем к случаю глобальной интерполяции.

Будем искать интерполяционный многочлен в виде линейной комбинации многочленов степени n :

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x)$$

- При этом потребуем, чтобы каждый многочлен $l_i(x)$ обращался в нуль во всех узлах интерполяции, за исключением одного (i -го), где он должен быть равен единице.

- этим условиям при $i = 0$ отвечает многочлен вида

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

- Действительно, $l_0(x_0) = 1$.
- При $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ числитель выражения обращается в нуль.

Аналогично

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$

.....

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

- Подставляя $l_0, l_1, \dots, l_n$ в $L(x)$ получим

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

- эта формула определяет **интерполяционный многочлен Лагранжа.**

- Из формулы для $L(x)$ можно получить выражения для линейной ($n = 1$) и квадратичной ($n = 2$) интерполяций:

$$L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1, \quad n = 1,$$

$$L(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2, \quad n = 2.$$

- Существует несколько обобщений интерполяционного многочлена Лагранжа.
- **интерполяционные многочлены Эрмита.**
- Здесь наряду со значениями функции y_i в узлах x_i задаются значения ее производной y_i' .
- Задача состоит в том, чтобы найти многочлен $\varphi(x)$ степени $2n + 1$, значения которого и значения его производной в узлах x_i удовлетворяют соответственно соотношениям

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad \varphi'(x_i) = y_i', \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

- Многочлен Ньютона.
- рассмотрим случай равноотстоящих значений аргумента, т. е. $x_i - x_{i-1} = h = \text{const}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).
- Величина h называется *шагом*.

- Введем понятие **конечных разностей**.
- Пусть известны значения функции в узлах $y_i = f(x_i)$
- Составим разности значений функции:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h),$$

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h),$$

- Эти значения называются **первыми разностями** (или разностями первого порядка) функции.

- **вторые разности функции:**

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,$$

- Аналогично составляются разности порядка k :

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

- Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функции.
Например,

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,$$

- Аналогично для любого k можно написать

$$\Delta^k y_0 = y_k - k y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \dots + (-1)^k y_0,$$

- Эту формулу можно записать и для значения разности в узле x_i :

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - k y_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+i-2} + \dots + (-1)^k y_i,$$

- Используя конечные разности, можно определить y_k

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0.$$

- Перейдем к построению интерполяционного многочлена Ньютона. Этот многочлен будем искать в следующем виде:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots (x - x_{n-1})$$

- График многочлена должен проходить через заданные узлы, $N(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$.
- Эти условия используем для нахождения коэффициентов многочлена:

$$N(x_0) = a_0 = y_0,$$

$$N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1h = y_1,$$

$$\begin{aligned} N(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = \\ &= a_0 + 2a_1h + 2a_2h^2 = y_2, \end{aligned}$$

- Найдем отсюда коэффициенты a_0, a_1, a_2

$$a_0 = y_0,$$

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2},$$

- Общая формула имеет вид

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- Подставляя эти выражения в формулу для $N(x)$ получаем следующий вид **интерполяционного многочлена Ньютона**:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots (x - x_{n-1}).$$

- Данную формулу часто записывают в другом виде.
- Для этого вводится переменная $t = (x - x_0) / h$

тогда $x = x_0 + th$,

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1,$$

$$\frac{x - x_2}{h} = t - 2,$$

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1.$$

тогда

$$N(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

Полученное выражение называется **первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования вперед.**

- Полученное выражение может аппроксимировать данную функцию на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$.
- Однако с точки зрения повышения точности расчетов более целесообразно использовать эту формулу для вычисления значения функции в точках левой половины рассматриваемого отрезка.

- Для правой половины отрезка $[x_0, x_n]$. разности лучше вычислять справа налево.
- В этом случае $t = (x - x_n) / h, \quad x = x_n + th,$

- тогда

$$N(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

Полученная формула называется вторым
интерполяционным многочленом Ньютона
для интерполирования назад.