

Введение в теорию пределов

Последовательность

• Опр. Числовой последовательностью x_1, x_2, \dots, x_n называется функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве \mathbb{N} натуральных чисел.

Кратко обозначается $\{x_n\}$ или $x_n, n \in \mathbb{N}$

x_n - общий или n -ый член последовательности

Примеры:

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n!}$$

Предел последовательности

- Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Предел функции в точке

- Определение Коши (в терминах $\varepsilon - \delta$)

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (при $x \rightarrow x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \end{aligned}$$

Односторонние пределы

- Число A_1 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 слева, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1}$
- Число A_2 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 справа, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$ $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2}$

Предел функции в бесконечности

• Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A}$$

Бесконечно большая функция

- Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| > M$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Бесконечно малая функция (величина)

- Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (б.м.величина)
- Величина обратная б.м.ф. есть б.б.ф.:
если $\alpha(x)$ б.м.ф. ($\alpha(x) \neq 0$) то $\frac{1}{\alpha(x)}$ б.б.ф.,
- Величина обратная б.б.ф. есть б.м.ф.:
если $f(x)$ - б.б.ф. ($f(x) \neq 0$), то $\frac{1}{f(x)}$ - б.м.ф.

Теоремы о бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции, $A(x)$ — ограниченная функция. Тогда...

1. Сумма (разность) б.м.ф. есть б.м.ф.:

$$\alpha(x) + \beta(x) \text{ и } \alpha(x) - \beta(x) - \text{б.м.ф.}$$

2. Произведение б.м.ф. есть б.м.ф.: $\alpha(x) \cdot \beta(x) - \text{б.м.ф.}$

3. Произведение б.м.ф. и ограниченной есть б.м.ф.

$$\alpha(x) \cdot A(x) - \text{б.м.ф.}$$

4. Частное б.м.ф. и функции $f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} - \text{б.м.ф.}$$

Связь между функцией, её пределом и бесконечно малой функцией

- $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A) \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)$
- $f(x) = A + \alpha(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Основные теоремы о пределах

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Функция может иметь только один предел при $x \rightarrow x_0$

Основные теоремы о пределах

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^n$$

- Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0)$$

Признаки существования пределов

- Теорема о пределе промежуточной функции.

Если функция заключена между двумя функциями, стремящимися к одному и тому же пределу, то она стремится к этому пределу.

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A; \quad g(x) < f(x) < \varphi(x) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

- Теорема о пределе монотонной функции.

Если функция $f(x)$ монотонная и ограниченная

при $x < x_0$ или $x > x_0$ то существует соответственно её левый предел

или её правый предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

Замечательные пределы

- I ЗП (первый замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- II ЗП (второй замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

или

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Эквивалентные бесконечно малые

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ то}$$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются

эквивалентными бесконечно малыми.

Применение эквивалентных б.м. для вычисления пределов функций

- Т. При вычислении предела функции можно бесконечно малую функцию заменить на ей эквивалентную.

При $x \rightarrow x_0$ эквивалентными б.м. являются...

$$\sin x \sim x; \quad \arcsin x \sim x; \quad \operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$e^{x-1} \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x$$

Правило Лопитала

При раскрытии неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$
предел отношений функций равен пределу
отношений производных этих функций.