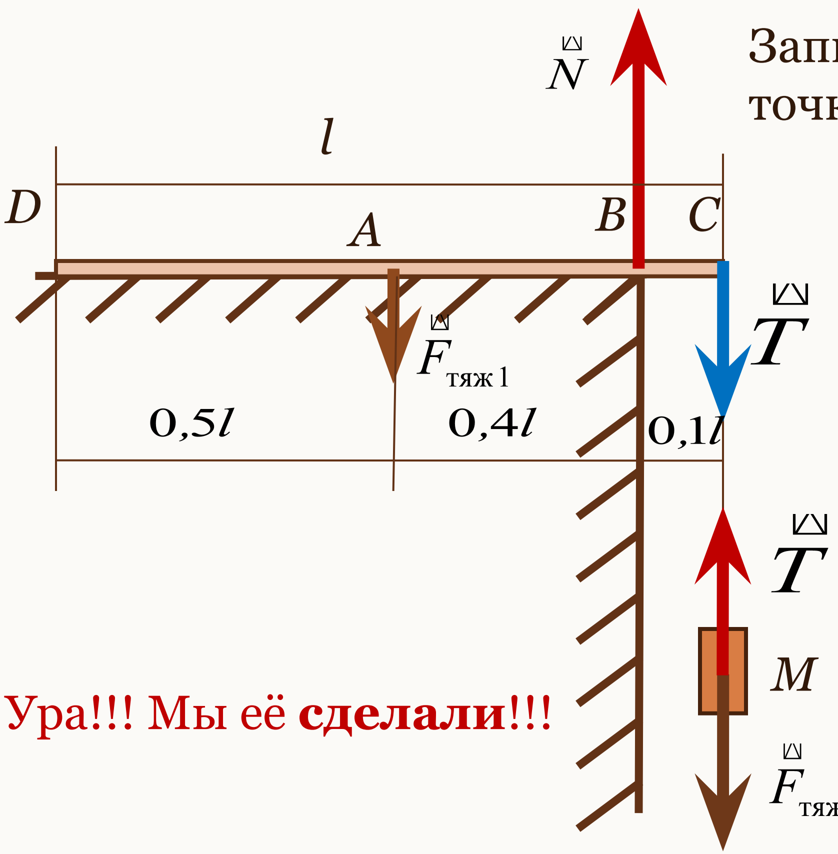
Решение задач по статике

Презентация подготовлена
учителем физики школы №332
Невского района
города Санкт-Петербурга
Татьяной Викторовной Романовой

На столе лежит однородный стержень массой *m*. Он свешивается со стола на 0,1 своей длины. Определите максимальную массу груза, который можно подвесить к его концу так, чтобы стержень не упал со стола?

Важно! При максимально допустимой нагрузке стержень отрывается от стола и реакция опоры остается только в точке *B*.

Решение:



Запишем правило моментов относительно точки *B* (чтобы исключить момент силы $\vec{N}$):

$$F_{тяж\,1}\cdot|AB| - T\cdot|BC| = 0 \qquad F_{тяж\,1} = mg$$

$$mg\cdot|AB| - T\cdot|BC| = 0$$

$$mg\cdot 0{,}4l - T\cdot 0{,}1l = 0$$

$$mg\cdot 0{,}4l = T\cdot 0{,}1l$$

$$T = \frac{mg\cdot 0{,}4l}{0{,}1l} \qquad T = 4mg$$

$$T = F_{тяж\,2}$$

$$F_{тяж\,2} = Mg$$

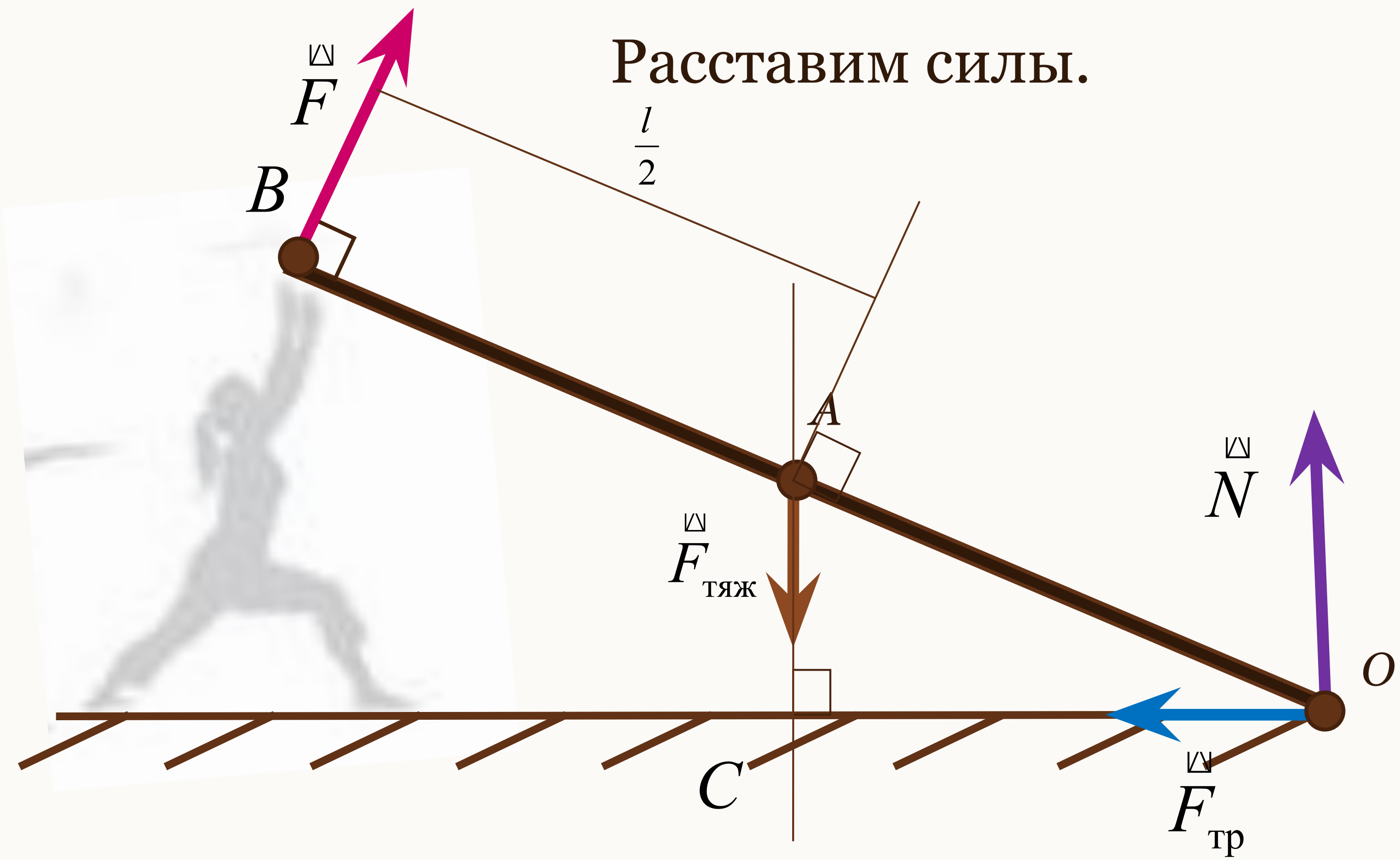
$$T = Mg$$

$$\boxed{M = 4m}$$

Ура!!! Мы её **сделали**!!!

Человек удерживает за один конец доску массой 50 кг. С горизонтальной поверхностью доска образует угол в 30°. С какой силой удерживает человек доску, если эта сила направлена перпендикулярно к доске?

Расставим силы.



Человек удерживает за один конец доску массой 50 кг. С горизонтальной поверхностью доска образует угол в 30°.С какой силой удерживает человек доску, если эта сила направлена перпендикулярно к доске?

Решение : Какую точку выбрать для отсчета моментов сил? почему?

Выберем точку O за точку, относительно которой будем отсчитывать моменты сил, запишем правило моментов:

$$mg|OC| - F|OB| = 0$$

Из ΔAOC: $|OC| = \frac{l}{2}\cos\alpha$

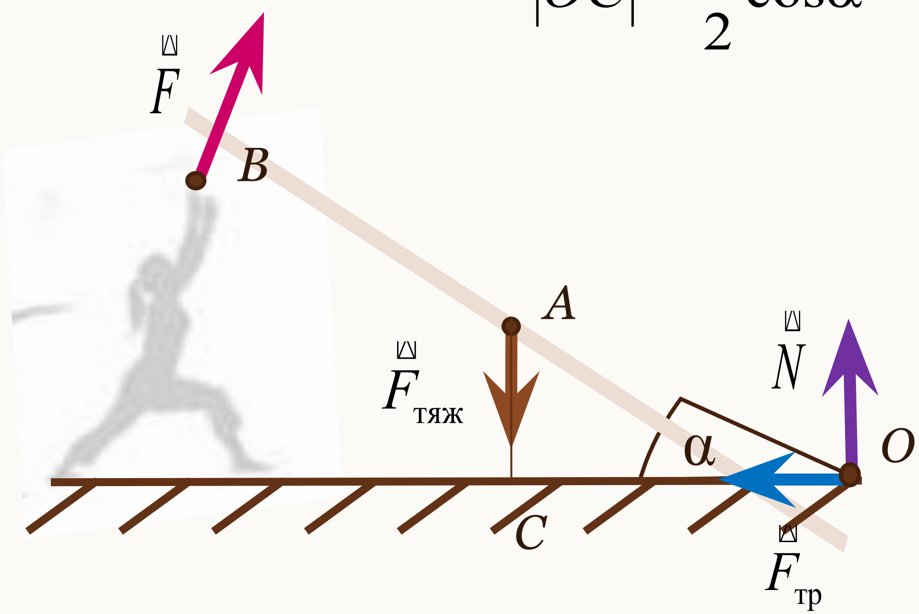
$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - Fl = 0$$

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha = Fl$$

$$F = \frac{mg\frac{l}{2}\cos\alpha}{l}$$

$$F = \frac{mg\cos\alpha}{2}$$

$$F = \frac{50 \cdot 10 \cdot 0{,}87}{2} = 217{,}5\ (\text{Н})$$



Тракторный каток радиусом *R* наезжает на препятствие высотой *h* (*h*<*R*). Какова должна быть сила тяги *T* трактора, чтобы каток преодолел препятствие? Масса катка *m*.

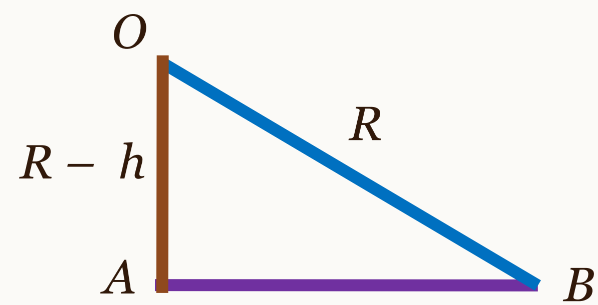
Внимание! В момент отрыва колеса сила реакции опоры N_2 *исчезает!!!* Каток отрывается от земли.

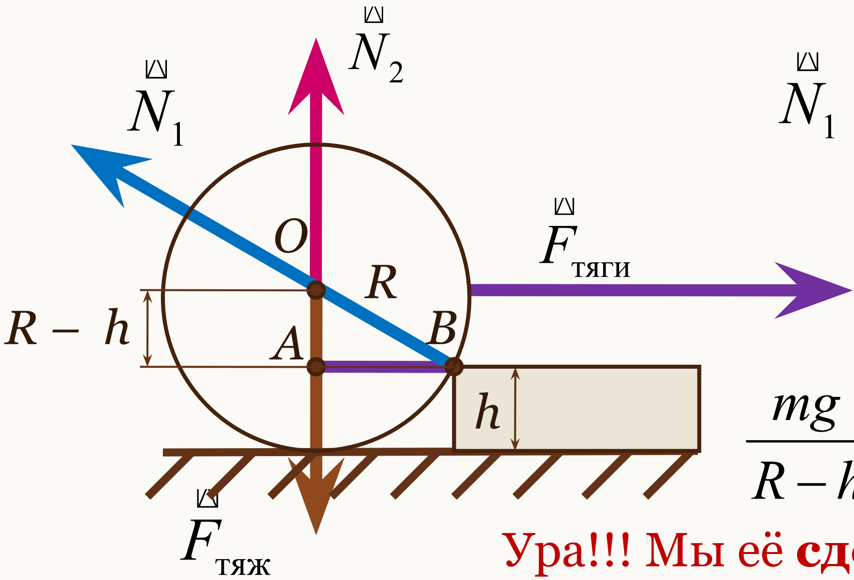
Решение (1 способ):

Построим треугольник сил. Он подобен треугольнику *AOB*

$\vec{F}_{\text{тяги}}$

$\vec{N}_1$ $\vec{F}_{\text{тяж}}$





$$AB = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} \qquad AB = \sqrt{2Rh - h^2}$$

Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{mg}{R-h} = \frac{F_{\text{тяги}}}{\sqrt{2Rh-h^2}} \qquad F_{\text{тяги}} = \frac{mg\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}$$

Ура!!! Мы её **сделали**!!!

А почему силы должны образовывать треугольник? А? 😊

Тракторный каток радиусом *R* наезжает на препятствие высотой *h* (*h*<*R*). Какова должна быть сила тяги *T* трактора, чтобы каток преодолел препятствие? Масса катка *m*.

Внимание! В момент отрыва колеса сила реакции опоры N_2 *исчезает!!!* Каток отрывается от земли.

Решение (2 способ):

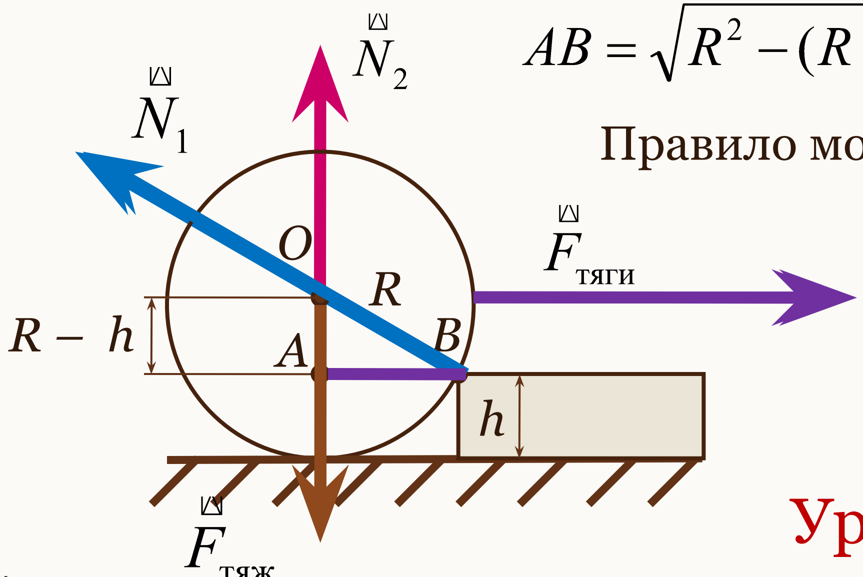
Применим правило моментов относительно точки *B*, учитывая, что сила реакции N_2 равна нулю и момент силы N_1 равен нулю:

$$\sum M = 0$$

$$mg \cdot |AB| - F_{\text{тяги}} \cdot |OA| = 0$$

Из рисунка и теоремы Пифагора:

$$AB = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} \qquad AB = \sqrt{2Rh - h^2} \qquad |OA| = R - h$$



Правило моментов:

$$mg\sqrt{2Rh - h^2} = F_{\text{тяги}}(R-h)$$

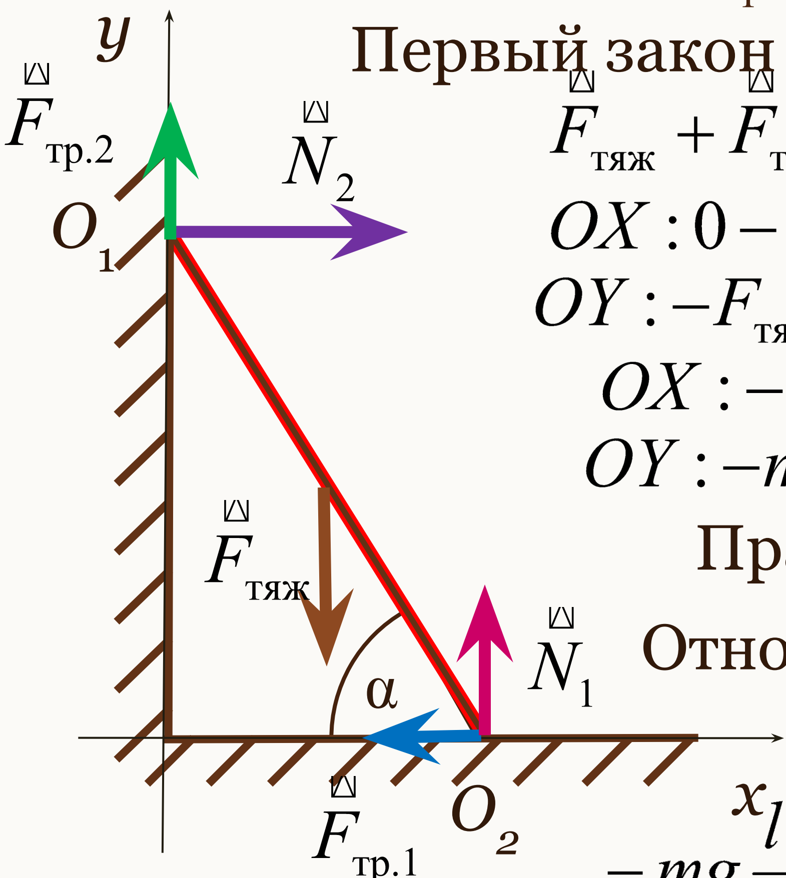
Окончательно имеем:

$$F_{\text{тяги}} = \frac{mg\sqrt{2Rh - h^2}}{R-h}$$

Ура!!! Мы её **сделали**!!!

А почему мы не взяли точку *O* для применения правила моментов? А? 😊

Лестница опирается на вертикальную стену и пол. При каких значениях угла между лестницей и полом она может стоять, если коэффициенты трения лестницы о пол и о стену равны μ_1 и μ_2 соответственно?



Первый закон Ньютона: $\vec{R} = 0$

$$\vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{тр.1} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр.2} = 0$$

$$OX: 0 - F_{тр.1} + 0 + N_2 + 0 = 0$$

$$OY: -F_{тяж} + 0 + N_1 + 0 + F_{тр.2} = 0$$

$$OX: -\mu_1 N_1 + N_2 = 0 \quad (1)$$

$$OY: -mg + N_1 + \mu_2 N_2 = 0 \quad (2)$$

Правило моментов: $\sum M = 0$

Относительно точки O_1:

$$-mg\frac{l}{2}\cos\alpha + N_1 l\cos\alpha - \mu_1 N_1 l\sin\alpha = 0 \quad (3)$$

Решаем систему уравнений (1 – 3) относительно α

$$\begin{cases} -\mu_1 N_1 + N_2 = 0 \quad (1) \\ -mg + N_1 + \mu_2 N_2 = 0 \quad (2) \\ -mg\dfrac{l}{2}\cos\alpha + N_1 l\cos\alpha - \mu_1 N_1 l\sin\alpha = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$N_2 = \mu_1 N_1$$

$$mg = N_1 + \mu_2 N_2$$

$$mg = N_1 + \mu_2 \mu_1 N_1$$

$$-(N_1 + \mu_2\mu_1 N_1)\frac{l}{2}\cos\alpha + N_1 l\cos\alpha - \mu_1 N_1 l\sin\alpha = 0 \quad \Big| : N_1 l$$

$$-(1 + \mu_2\mu_1)\frac{1}{2}\cos\alpha + \cos\alpha - \mu_1\sin\alpha = 0$$

$$(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu_2\mu_1 + 1)\cos\alpha - \mu_1\sin\alpha = 0$$

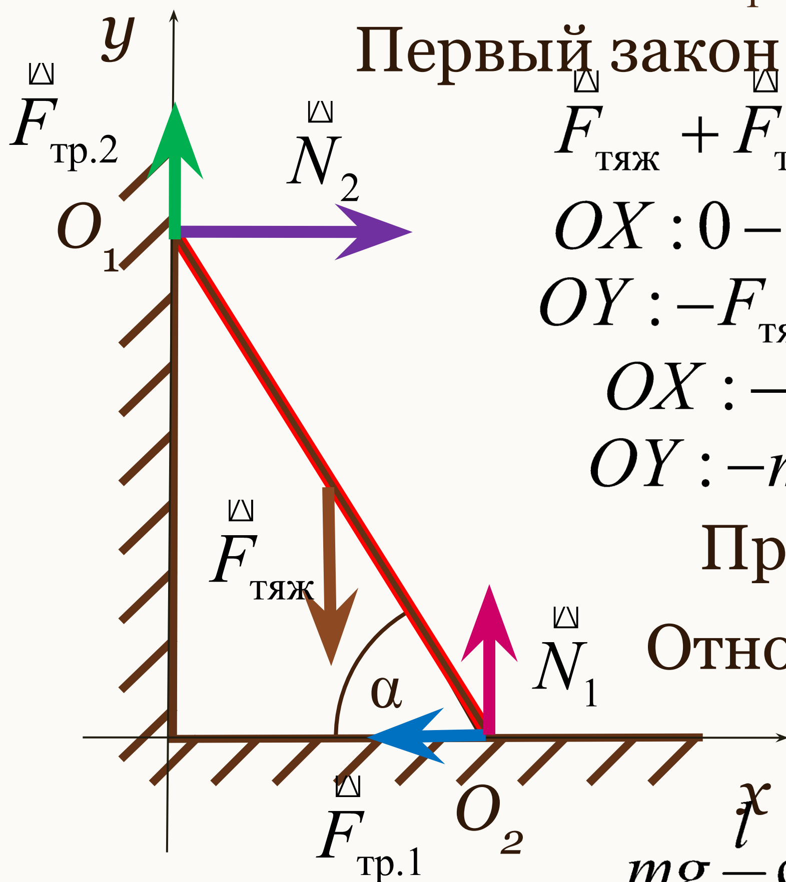
$$\text{Окончательно}: \alpha \geq \operatorname{arctg}\frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_1}$$

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu_2\mu_1)\cos\alpha = \mu_1\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \mu_2\mu_1}{2\mu_1}$$

Решить задачу, записав правило моментов относительно точки O_2

Лестница опирается на вертикальную стену и пол. При каких значениях угла между лестницей и полом она может стоять, если коэффициенты трения лестницы о пол и о стену равны μ_1 и μ_2 соответственно?



Первый закон Ньютона: $\vec{R} = 0$

$$\vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{тр.1} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр.2} = 0$$

$$OX: 0 - F_{тр.1} + 0 + N_2 + 0 = 0$$

$$OY: -F_{тяж} + 0 + N_1 + 0 + F_{тр.2} = 0$$

$$OX: -\mu_1 N_1 + N_2 = 0 \quad (1)$$

$$OY: -mg + N_1 + \mu_2 N_2 = 0 \quad (2)$$

Правило моментов: $\sum M = 0$

Относительно точки O_2:

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - \mu_2 N_2 l\cos\alpha - N_2 l\sin\alpha = 0 \quad (3)$$

Решаем систему уравнений (1 – 3) относительно α

$$\begin{cases} -\mu_1 N_1 + N_2 = 0 \quad (1) \\ -mg + N_1 + \mu_2 N_2 = 0 \quad (2) \\ mg\dfrac{l}{2}\cos\alpha - \mu_2 N_2 l\cos\alpha - N_2 l\sin\alpha = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$N_2 = \mu_1 N_1$$

$$mg = N_1 + \mu_2 N_2$$

$$N_1 = \frac{N_2}{\mu_1}$$

$$mg = \frac{N_2}{\mu_1} + \mu_2 N_2$$

$$\left(\frac{N_2}{\mu_1} + \mu_2 N_2\right)\frac{l}{2}\cos\alpha - \mu_2 N_2 l\cos\alpha - N_2 l\sin\alpha = 0 \;\Big|\; : N_2 l$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1} + \mu_2\right)\frac{1}{2}\cos\alpha - \mu_2\cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\left(\frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2}\mu_2\right)\cos\alpha - \mu_2\cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

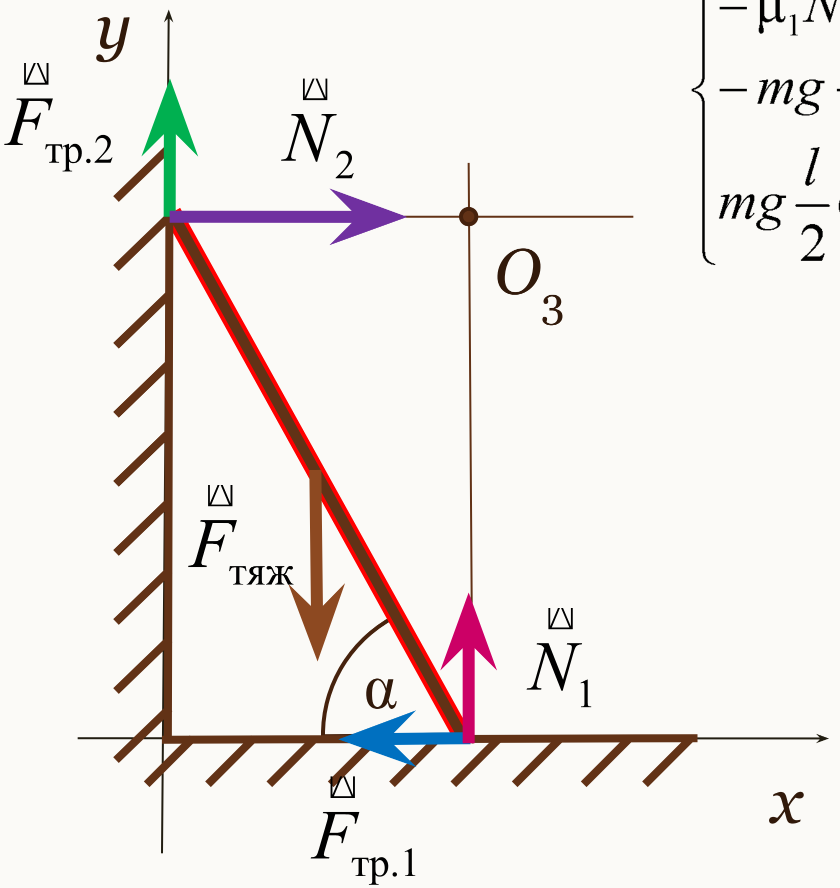
$$\left(\frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2}\mu_2 - \mu_2\right)\cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\left(\frac{1}{2\mu_1} - \frac{1}{2}\mu_2\right)\cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\left(\frac{1}{2\mu_1} - \frac{1}{2}\mu_2\right)\cos\alpha = \sin\alpha$$

$$\left(\frac{1}{2\mu_1} - \frac{1}{2}\mu_2\right) = \mathrm{tg}\alpha \qquad \frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_1} = \mathrm{tg}\alpha$$

Решить задачу, записав правило моментов относительно точки O_3



$$\begin{cases} -\mu_1 N_1 + N_2 = 0 \quad (1) \\ -mg + N_1 + \mu_2 N_2 = 0 \quad (2) \\ mg\dfrac{l}{2}\cos\alpha - \mu_2 N_2 l\cos\alpha - \mu_1 N_1 l\sin\alpha = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Решаем систему уравнений (1 – 3) относительно α

$$\begin{cases} -\mu_1 N_1 + N_2 = 0 \quad (1) \\ -mg + N_1 + \mu_2 N_2 = 0 \quad (2) \\ mg\dfrac{l}{2}\cos\alpha - \mu_2 N_2 l\cos\alpha - \mu_1 N_1 l\sin\alpha = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$N_2 = \mu_1 N_1$$

$$mg = N_1 + \mu_2 N_2$$

$$mg = N_1 + \mu_2\mu_1 N_1$$

$$(N_1 + \mu_2\mu_1 N_1)\frac{l}{2}\cos\alpha - \mu_2 N_2 l\cos\alpha - \mu_1 N_1 l\sin\alpha = 0$$

$$(N_1 + \mu_2\mu_1 N_1)\frac{l}{2}\cos\alpha - \mu_2\mu_1 N_1 l\cos\alpha - \mu_1 N_1 l\sin\alpha = 0 \quad \Big| : N_1 l$$

$$(1 + \mu_2\mu_1)\frac{1}{2}\cos\alpha - \mu_2\mu_1\cos\alpha - \mu_1\sin\alpha = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu_2\mu_1 - \mu_2\mu_1\right)\cos\alpha - \mu_1\sin\alpha = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu_2\mu_1 - \mu_2\mu_1\right)\cos\alpha = \mu_1\sin\alpha$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu_2\mu_1\right)\cos\alpha = \mu_1\sin\alpha$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu_2\mu_1\right) = \mu_1\,\mathrm{tg}\alpha$$

$$(1 - \mu_2\mu_1)\frac{1}{2} = \mu_1\,\mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1 - \mu_2\mu_1}{2\mu_1}$$

Вывод по задаче

- Выполняя рисунок, нужно начинать вектор силы точно в месте приложения , иначе можно неправильно определить плечо.
- В данной задаче не важно, какую точку взять для применения правила моментов. Каждая из трех выбранных точек убирает два момента сил, поэтому сложность решения любым из рассмотренных способов примерно одинакова.
- В других задачах надо постараться найти такую точку, которая убирает бóльшее число моментов тех сил, которые **не** просят найти. Тогда решение будет проще.

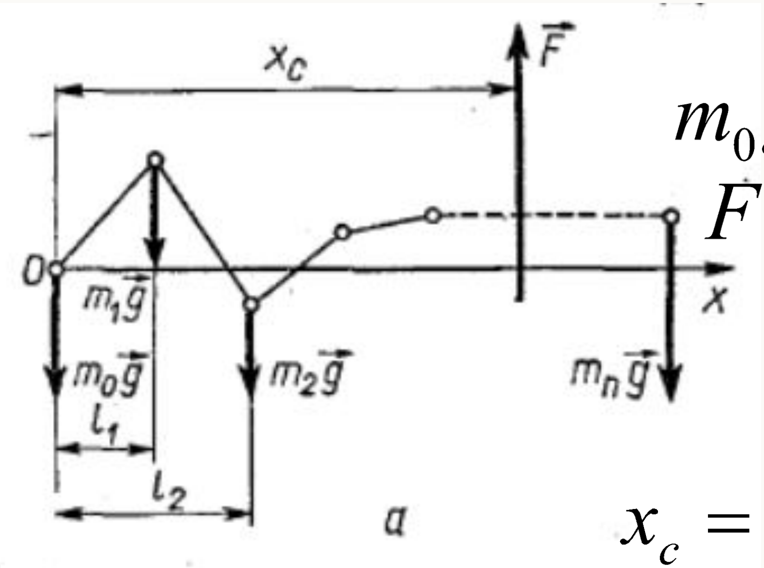
Решение задач на определение положения центра тяжести

В основе решения задач на определение центра тяжести лежит следующее обстоятельство:

- Если в центре тяжести частиц, жестко связанных друг с другом, приложить уравновешивающую силу, равную по модулю силе тяжести всех частиц, то система будет находится в равновесии.

Сумма моментов всех сил, включая и уравновешивающую, должна быть равна нулю относительно любой точки.

Положение центра тяжести будем отсчитывать от крайней левой точки.



Первый закон Ньютона:

$$m_0 g + m_1 g + m_2 g + \ldots + m_n g - F = 0$$

$$F = m_0 g + m_1 g + m_2 g + \ldots + m_n g \quad (1)$$

Правило моментов:

$$m_0 g 0 + m_1 g x_1 + \ldots + m_n g x_n - F x_c = 0$$

$$x_c = \frac{m_0 g 0 + m_1 g x_1 + \ldots + m_n g x_n}{F} \quad (2)$$

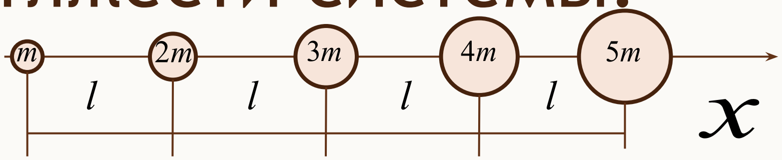
(1) В (2):

$$x_c = \frac{m_0 g 0 + m_1 g x_1 + \ldots + m_n g x_n}{m_0 g + m_1 g + m_2 g + \ldots + m_n g} \quad (2) \Big| : g$$

$$x_c = \frac{m_0 0 + m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \quad (3)$$

$$\boxed{x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

Пять шаров , массы которых равны соответственно m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, укреплены на стержне так, что их центры находятся на расстоянии l друг от друга. Пренебрегая массой стержня, найдите центр тяжести системы.



$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$x_c = \frac{m0 + 2ml + 3m2l + 4m3l + 5m4l}{m + 2m + 3m + 4m + 5m}$$

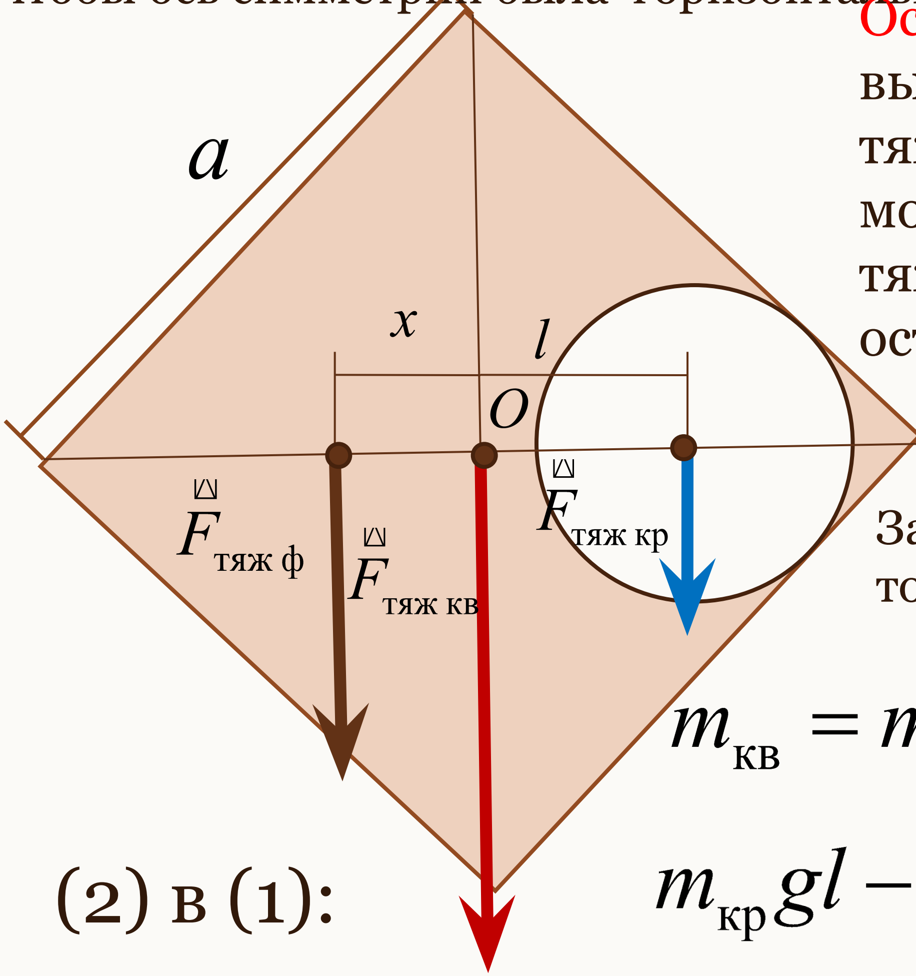
Ура!!! Мы **её сделали**!!!

$$x_c = \frac{8}{3} l$$

Физика Forever!!!

Определить центр тяжести однородной квадратной пластинки со стороной a, в которой вырезано круглое отверстие радиусом $a/4$, как показано на рисунке.

Важно! В задачах такого типа фигуру с вырезом желательно расположить так, чтобы ось симметрии была горизонтальна.



Основная идея задачи: если вставить вырезанную часть на место, то силу тяжести целой фигуры (целого **кв**адрата) можно представить как сумму сил тяжести вырезанной части (**кр**уга) и оставшейся части (**ф**игуры с вырезом).

$$m_{\text{кв}}g = m_{\text{кр}}g + m_{\text{ф}}g$$

Запишем правило моментов относительно точки O:

$$m_{\text{кр}}gl - m_{\text{ф}}gx = 0 \quad (1)$$

$$m_{\text{кв}} = m_{\text{кр}} + m_{\text{ф}}; \; m_{\text{ф}} = m_{\text{кв}} - m_{\text{кр}} \quad (2)$$

(2) в (1):

$$m_{\text{кр}}gl - \left(m_{\text{кв}} - m_{\text{кр}}\right)gx = 0 \quad (3)$$

Продолжим

$$m_{кр}gl-(m_{кв}-m_{кр})gx=0 \quad (3)$$

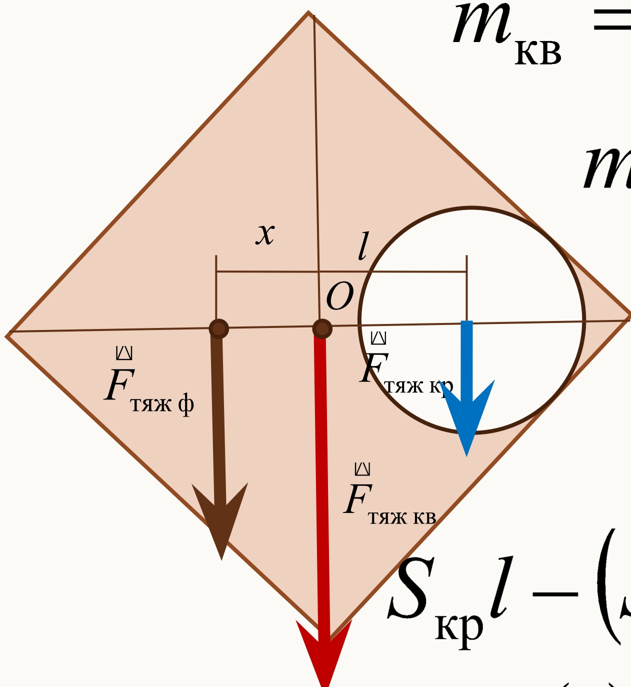
$$m_{кв}=\rho V_{кв};\; m_{кр}=\rho V_{кр};\; V=Sh$$

$$m_{кв}=\rho S_{кв}h;\; m_{кр}=\rho S_{кр}h \quad (4)$$

(4) в (3):

$$\rho S_{кр}hgl-(\rho S_{кв}h-\rho S_{кр}h)gx=0 \quad \Big| : \rho gh$$

$$S_{кр}l-(S_{кв}-S_{кр})x=0 \quad (5)$$



$$S_{кв}=a^2 \quad (6);\; S_{кр}=\pi R^2=\pi\frac{a^2}{16} \quad (7) \qquad l=\frac{a\sqrt{2}}{4} \quad (8)$$

Ура!!! Мы **и эту сделали**!!!

$$S_{\text{кр}}l-\left(S_{\text{кв}}-S_{\text{кр}}\right)x=0 \quad (5)$$

$$S_{\text{кв}}=a^2 \quad (6);\ S_{\text{кр}}=\pi R^2=\pi\frac{a^2}{16} \quad (7)\ l=\frac{a\sqrt{2}}{4} \quad (8)$$

(6,7,8) в (5):

$$\pi\frac{a^2}{16}\frac{a\sqrt{2}}{4}-\left(a^2-\pi\frac{a^2}{16}\right)x=0 \,\Big|\cdot\frac{16}{a^2}$$

$$\pi\frac{a\sqrt{2}}{4}-(16-\pi)x=0$$

$$x=\frac{\pi a\sqrt{2}}{4(16-\pi)}$$