О теореме Пифагора и способах её доказательства

- Введение
- Теорема Пифагора
- Пифагоровы тройки
- Алгебраические доказательства теоремы:
  - Первое доказательство.
  - Второе доказательство.
- Не алгебраические доказательства теорем:
  - Простейшее доказательство.
  - Древнекитайское доказательство.
  - Древнеиндийское доказательство.

Введение
Сказка «Дом»

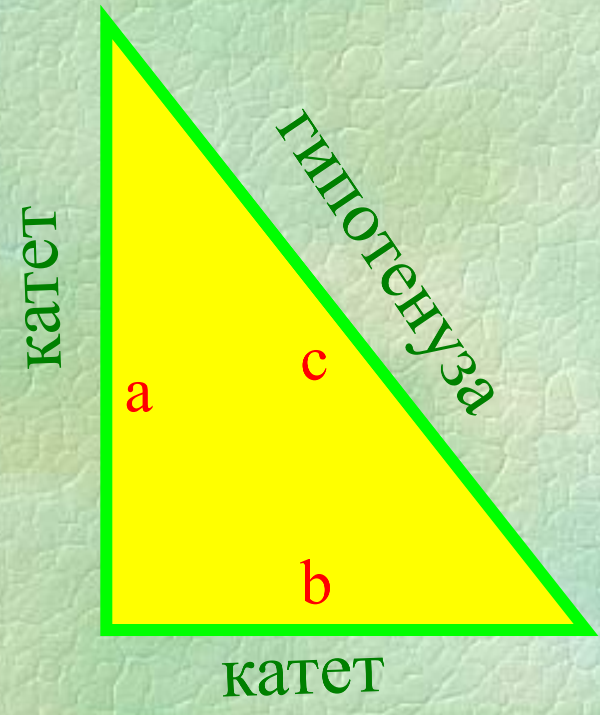
Далеко-далеко. Куда не летают даже самолёты, находится страна Геометрия.

В этой необычной стране был удивительный город-город Теорем.Однажды в этот город пришла красивая девочка по имени Гипотенуза.Она попробовала снять комнату, но куда бы она не обращалась, ей всюду отказывали.Наконец она подошла к покосившемуся домику и постучала.Ей открыл мужчина, назвавший себя Прямым Углом, и он предложил Гипотенузе поселиться у него.Гипотенуза осталась в доме , в котором жили Прямой Угол и два его маленьких сына по имени Катеты. С тех пор жизнь в доме Прямого Угла пошла по- новому.На окошке Гипотенуза посадила цветы. А в палисаднике развела розы. Дом принял форму прямоугольного треугольника.Обоим Катетам, Гипотенуза очень понравилась и они попросили её остаться навсегда в их доме.По вечерам эта дружная семья собирается за семейным столом.Иногда Прямой Угол играет со своими детишками в прятки.Чаще всего искать приходиться ему, а Гипотенуза прячется так искусно, что найти её бывает очень трудно. Однажды во время игры Прямой угол заметил интересное свойство: если ему удается найти катеты, то отыскать Гипотенузу не составляет труда.Так Прямой Угол пользуется этой закономерностью, надо сказать, очень успешно.На свойстве этого прямоугольного треугольника и основана теорема

Теорема Пифагора

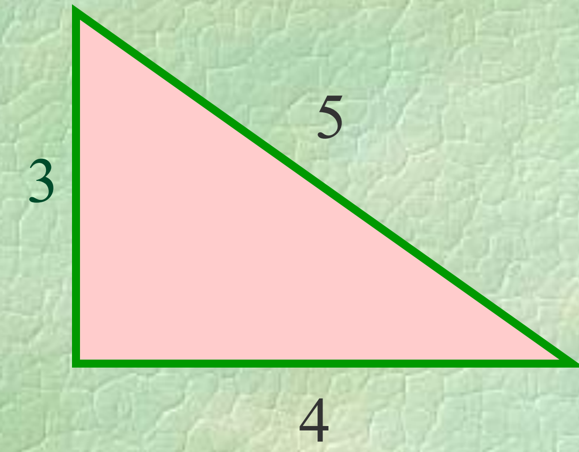
В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

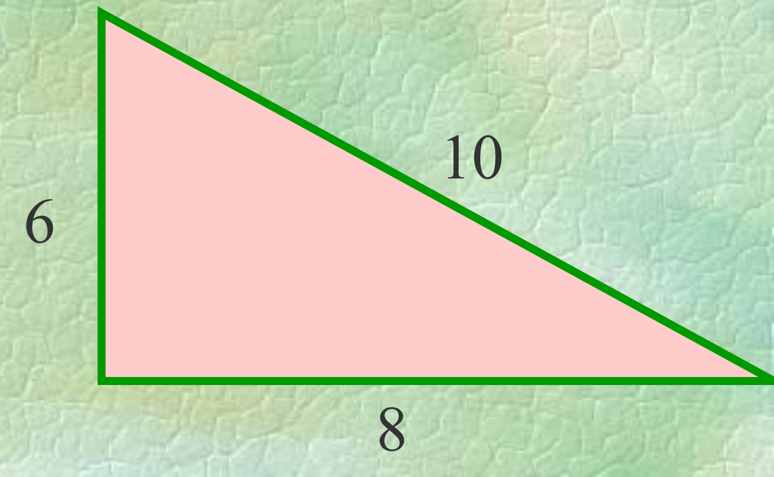
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$



Египетский треугольник. Треугольник Пифагора.

- **Прямоугольный треугольник со сторонами 3,4 и 5 имел когда-то большое практическое применение.В частности с помощью его строили прямые углы.Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 назвали египетским.**
- **Треугольники со сторонами, выраженными целыми числами, называют пифагоровыми. Пр. 5, 12 и 13.Таких треугольников множество, их стороны находят по формулам: m^2+n^2, m^2-n^2, $2mn$, причем $m \neq n$.**



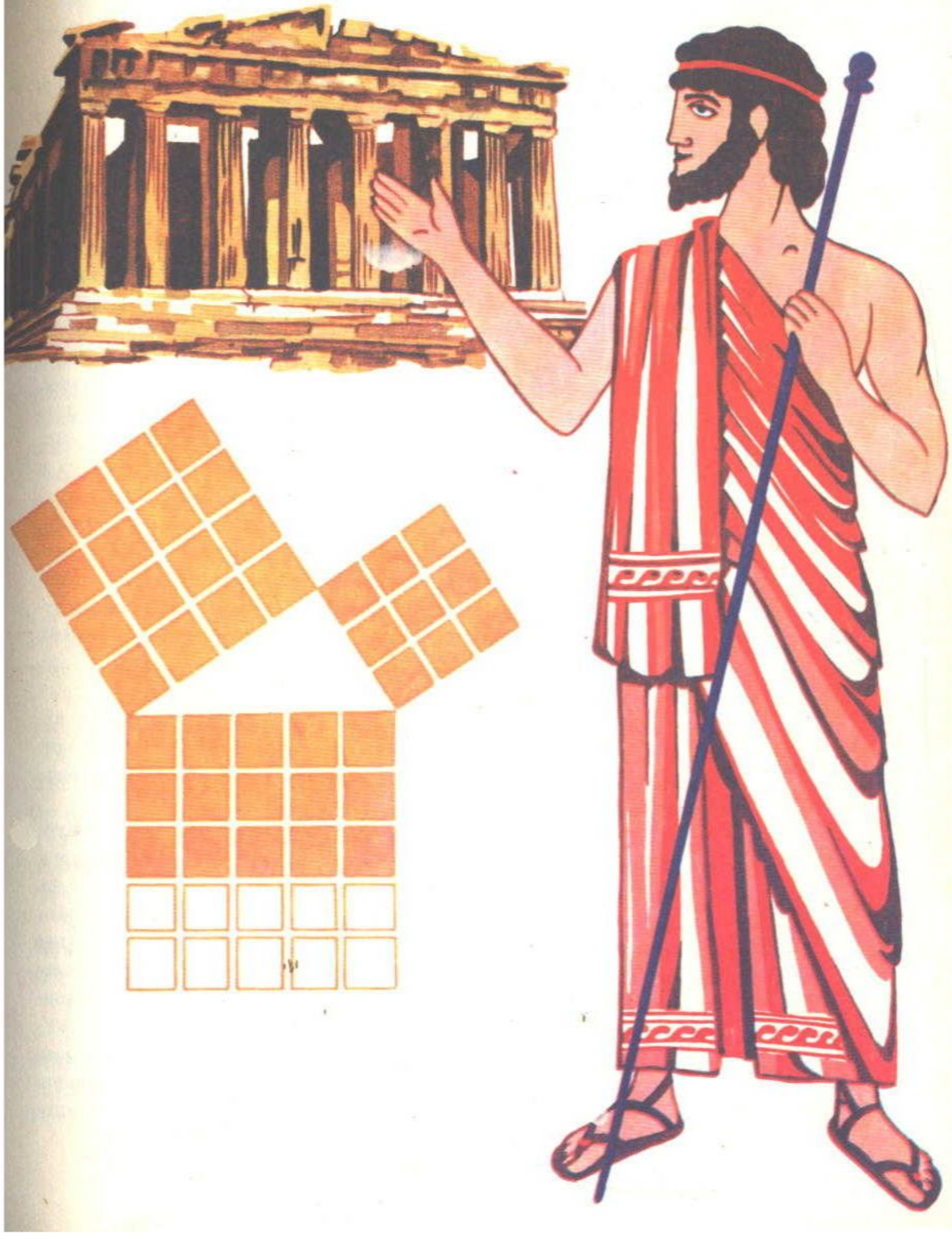


«Пифагоровы тройки»

- Пифагоровы числа или пифагоровы тройки. Это великое открытие пифагорейских математиков.
- Тройки чисел таких, что $a^2+b^2=c^2$.
- Интересные особенности этих чисел:
- Один из «катетов» должен быть кратным трём.
- Один из «катетов» должен быть кратным четырём.
- Одно из Пифагоровых чисел должно быть кратно пяти.

a	3	5	6	7	9	11	13	15	17	19
b	4	12	8	24	40	60	84	112	114	180
c	5	13	10	25	41	61	85	113	145	181

Рассмотрим некоторые
классические доказательства
теоремы Пифагора,
известные из древних трактатов.
Сделать это полезно
еще и потому, что в
современных школьных учебниках
дается алгебраическое
доказательство теоремы.
При этом бесследно исчезает
первозданная геометрическая
аура теоремы, теряется та
нить Ариадны, которая вела
древних мудрецов к истине,
а путь этот почти всегда
оказывался кратчайшим
и всегда красивым.
Итак, доказательства
теоремы Пифагора.



Алгебраические доказательства теоремы

- **Предисловие.**

Еще давно была изобретена головоломка, называемая сегодня “Пифагор”. Нетрудно убедиться в том, что в основе семи частей головоломки лежат равнобедренный прямоугольный треугольник и квадраты, построенные на его катетах, или, иначе, фигуры, составленные из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников и потому укладывающиеся в квадрат. Такова лишь малая толика богатств, скрытых в жемчужине античной математики — теореме Пифагора. Далее рассмотрим несколько алгебраических доказательств теоремы.

Первое доказательство (алгебраическое)

Пусть *T* — прямоугольный треугольник с катетами *a, b* и гипотенузой *c* (рис. 6, а). Докажем, что $c^2=a^2+Ь^2$.

Построим квадрат *Q* со стороной *a+Ь* (рис. 6, б). На сторонах квадрата *Q* возьмем точки *A, B, C, D* так, чтобы отрезки *AB, BC, CD, DA* отсекали от квадрата *Q* прямоугольные треугольники T_1, T_2, T_3, T_4 с катетами *a* и *b*. Четырехугольник *ABCD* обозначим буквой *P*. Покажем, что *P* — квадрат со стороной *c*.

Все треугольники T_1, T_2, T_3, T_4 равны треугольнику *T* (по двум катетам). Поэтому их гипотенузы равны гипотенузе треугольника *T*, т. е. отрезку *c*. Докажем, что все углы этого четырехугольника прямые.

Пусть α и β — величины острых углов треугольника *T*. Тогда, как вам известно, α+β= 90°. Угол у при вершине *A* четырехугольника *P* вместе с углами, равными α и β, составляет развернутый угол. Поэтому α+β=180°. И так как α+β= 90°, то γ=90°. Точно так же доказывается, что и остальные углы четырехугольника *P* прямые. Следовательно, четырехугольник *P* — квадрат со стороной *c*.

Квадрат *Q* со стороной *a+Ь* слагается из квадрата *P* со стороной *c* и четырех треугольников, равных треугольнику *T*. Поэтому для их площадей выполняется равенство *S(Q)=S(P)+4S(T)* .

Так как $S(Q)=(a+b)^2$; $S(P)=c^2$ и $S(T)=1/2(ab)$, то, подставляя эти выражения в $S(Q)=S(P)+4S(T)$, получаем равенство $(a+b)^2=c^2+4*(1/2)ab$.

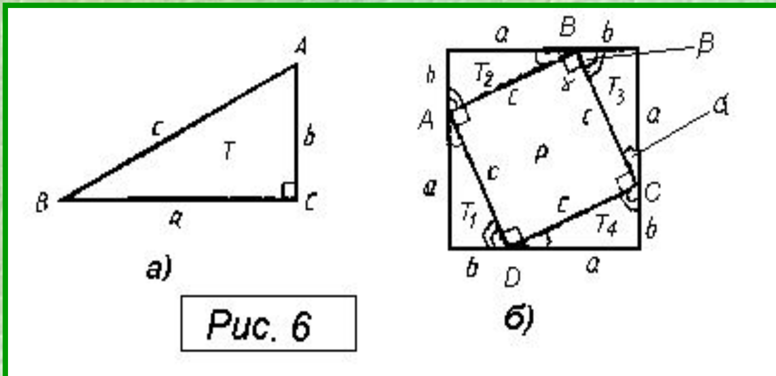
Поскольку $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, то равенство

$(a+b)^2=c^2+4*(1/2)ab$

можно записать так: $a^2+b^2+2ab=c^2+2ab$.

Из равенства $a^2+b^2+2ab=c^2+2ab$ следует,

что $c^2=a^2+Ь^2$. Ч.Т.Д.



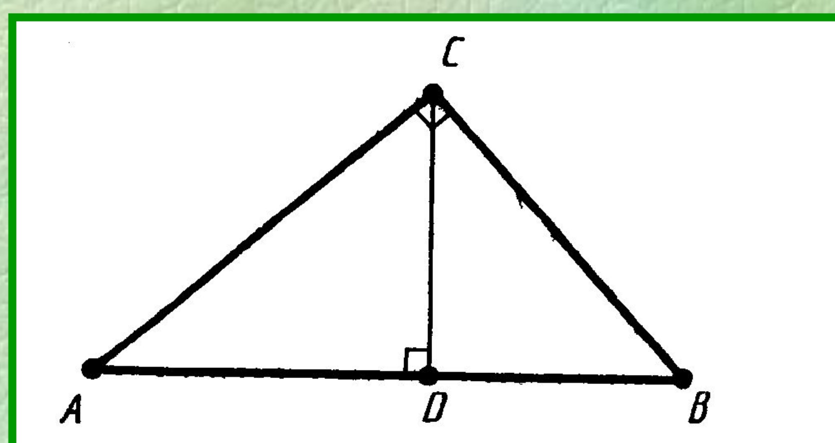
Второе доказательство. (алгебраическое)

Пусть *ABC* — данный прямоугольный треугольник с прямым углом *C*. Проведем высоту *CD* из вершины прямого угла *C*

По определению косинуса угла *(Косинусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе) $\cos A = AD/AC = AC/AB$.

Отсюда $AB*AD=AC^2$. Аналогично $\cos B = BD/BC = BC/AB$. Отсюда $AB*BD=BC^2$. Скла[illegible]почленно и замечая, что $AD+DB=AB$, получим:

$AC^2+BC^2=AB(AD + DB)=AB^2$. Теорема доказана.



Простейшее доказательство.

Не алгебраические доказательства теоремы.

Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах."

Простейшее доказательство **теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 1), чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например,**

для ∧АВС : квадрат, построенный на гипотенузе *АС*,

содержит 4 исходных треугольника, а квадраты,

построенные на катетах,— по два.

Теорема доказана.

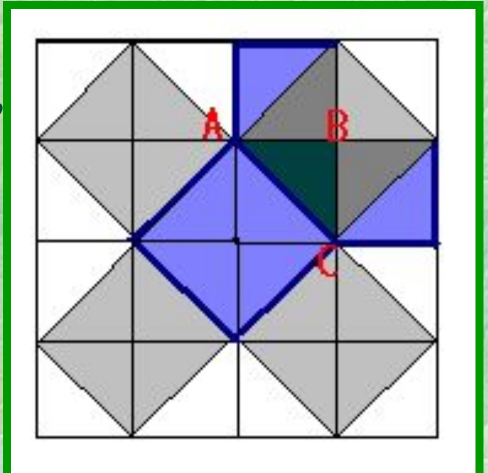
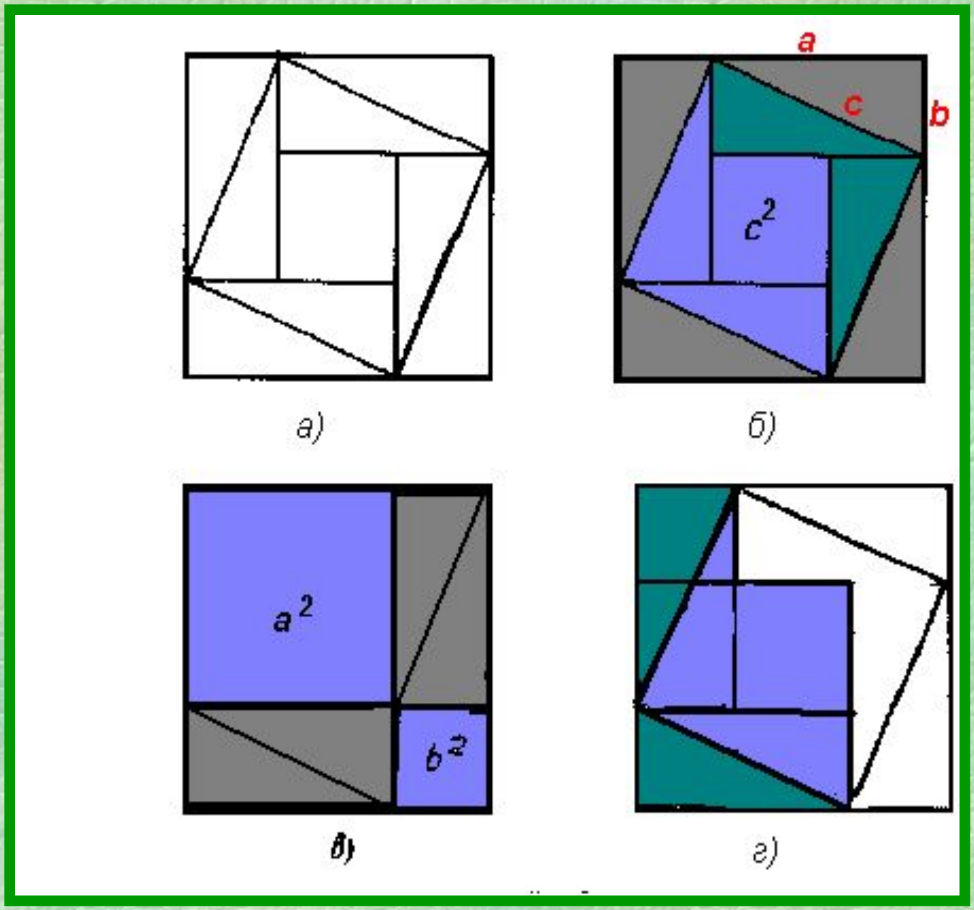


Рис.1

Древнекитайское доказательство.
(не алгебраическое)
Предисловие.

- Математические трактаты Древнего Китая дошли до нас в редакции II в. до н.э. Дело в том, что в 213 г. до н.э. китайский император Ши Хуан-ди, стремясь ликвидировать прежние традиции, приказал сжечь все древние книги. Во II в. до н.э. в Китае была изобретена бумага и одновременно начинается воссоздание древних книг. Так возникла тематика в девяти книгах” — главное из сохранившихся математик - астрономических сочинений в книге “Математики” помещен чертеж ,доказывающий теорему Пифагора. Ключ к этому доказательству подобрать нетрудно.

Древнекитайское доказательство.



В самом деле, на древнекитайском чертеже четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a, b и гипотенузой *c* уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной *a+b,* а внутренний — квадрат со стороной *c,* построенный на гипотенузе

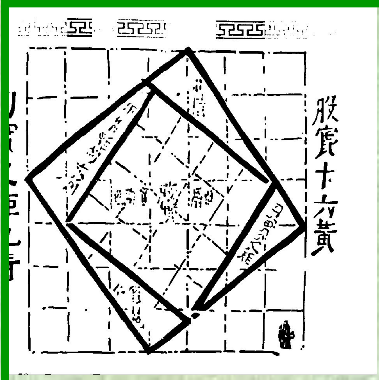
(рис. б). Если квадрат со стороной *c* вырезать и оставшиеся 4 затушеванных треугольника уложить в два прямоугольника (рис. *в),* то ясно, что образовавшаяся пустота, с одной стороны, равна c^2, а с другой — $a^2+Ь^2$, т.е. $c^2=a^2+Ь^2$. Теорема доказана.

Древнеиндийское доказательство.

Математики Древней Индии заметили, что для доказательства теоремы Пифагора достаточно использовать внутреннюю часть древнекитайского чертежа. В написанном на пальмовых листьях трактате “Сиддханта широмани” (“Венец знания”) крупнейшего характерным для индийских доказательств словом “Смотри!”. Как видим, в квадрате индийского математика XII в. Бхаскары помещен чертеж с со стороной $a+b$ изображали четыре прямоугольньных треугольника с катетами длин

a и b (рис.1и2).После чего писали одно слово “Смотри!”. И действительно, взглянув на эти рисунки, видим, что слева свободна от треугольников фигура, состоящая из двух квадратов со сторонами a и b,соответственно её площадь равна a^2+b^2, а справа- квадрат со стороной c -его площадь равна c^2 . Значит, $a^2+b^2=c^2$, что и составляет утверждение теоремы Пифагора.

чертеж из трактата “Чжоу-би...”.



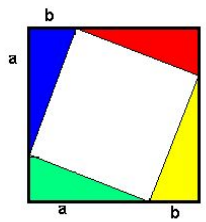


рис.1

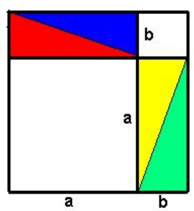
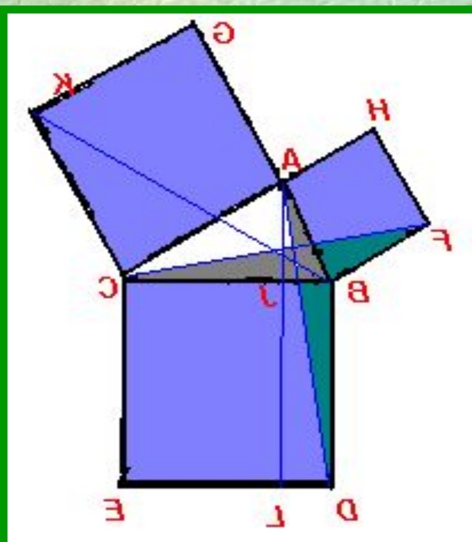


рис.2

Доказательство Евклида.

Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги “Начал”. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника *ABC* строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник *BJLD* равновелик квадрату *ABFH,* а прямоугольник *ICEL* — квадрату *AC КС.* Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе. В самом деле, затушеванные на рисунке треугольники *ABD* и *BFC* равны по двум сторонам и углу между ними: *FB=AB, BC==BD* и *∠FBC=d+∠ABC=∠ABD.* Но S_{ABD}=1/2 S_{BJLD}, так как у треугольника *ABD* и прямоугольника *BJLD* общее основание *BD* и общая высота *LD.* Аналогично S_{FBC}=1\2 S_{ABFH} *(BF*—общее основание, *AB*—общая высота). Отсюда, учитывая, что S_{ABD}=S_{FBC} , имеем S_{BJLD}= S_{ABFH}.Аналогично, используя равенство треугольников *ВСК* и *АСЕ,*доказывается, что S_{JCEL}=S_{ACKG}. Итак, S_{ABFH}+S_{ACKG}=S_{BJLD}+S_{JCEL}= S_{BCED} , что и требовалось доказать.



О доказательстве Евклида

- **Доказательство Евклида в сравнении с древнекитайским или древнеиндийским выглядит чрезмерно сложным. По этой причине его нередко называли “ходульным” и “надуманным”. Но такое мнение поверхностно. Теорема Пифагора у Евклида является заключительным звеном в цепи предложений 1-й книги “Начал”. Для того чтобы логически безупречно построить эту цепь, чтобы каждый шаг доказательства был основан на ранее доказанных предложениях, Евклиду нужен был именно выбранный им путь.**

- **Еще давно была изобретена головоломка, называемая сегодня “Пифагор”. Нетрудно убедиться в том, что в основе семи частей головоломки лежат равнобедренный прямоугольный треугольник и квадраты, построенные на его катетах, или, иначе, фигуры, составленные из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников и потому укладывающиеся в квадрат. Такова лишь малая толика богатств, скрытых в жемчужине античной математики — теореме Пифагора.**

Заключение

В заключении еще раз хочется сказать о важности теоремы. Значение ее состоит прежде всего в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии. К сожалению, невозможно здесь привести все или даже самые красивые доказательства теоремы, однако хочется надеется, что приведенные примеры убедительно свидетельствуют об огромном интересе сегодня, да и вчера, проявляемом по отношению к ней.