Пределы. Непрерывность функций

Автор: Королёв Иван, 11 «А» класс

Руководитель: Степанищева Зоя Григорьевна

Введение

Цель работы:

1. Совершенствовать уровень своей математической подготовки.

2. Овладеть некоторыми вопросами математического анализа.

Задачи исследования:

1. Изучить определения и свойства предела, непрерывность функции.

2. Выработать навыки нахождения пределов, построения графи-ков разрывных функций.

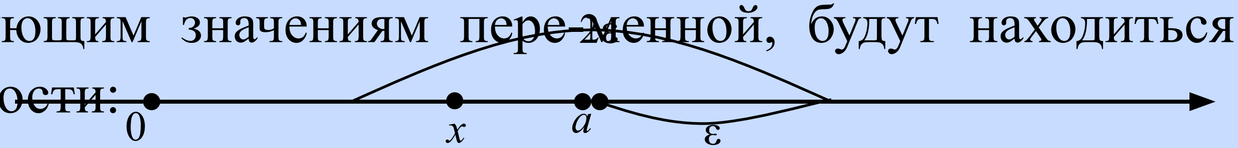
Актуальность темы:

Изучение данной темы предусматривает межпредметную связь математики и физики. Понятие предела непосредственно связано с ос-новными понятиями математического анализа – производная, инте-грал и др.

Предел переменной величины

Пределом переменной величины *x* называется постоянное число *a*, если для каждого наперед заданного произвольно малого положи-тельного числа ε можно указать такое значение переменной *x*, что все последующие значения будут удовлетворять неравенству $|x-a|<\varepsilon$. Если число *a* есть предел переменной величины *x*, то пишут: $\lim x=a$.

В терминах геометрических определение предела может быть сформулировано следующим образом: постоянное число *a* есть пре-дел переменной *x*, если для любой наперед заданной как угодно малой окрестности с центром в точке *a* и радиусом ε найдется такое значе-ние *x*, что все точки, соответствующие последующим значениям пере-менной, будут находиться в этой окрестности:



Предел переменной величины

Рассмотрим несколько примеров переменных, стремящихся к пределу.

Пример 1. Доказать, что переменная $x_n=1+\frac{1}{n}$ имеет предел, равный единице.

Составим разность между переменной и ее пределом: $|x_n-1|=|(1+\frac{1}{n})-1|=\frac{1}{n}$. Для любого ε все последующие значения перемен-ной, начиная с номера n, где $n>\frac{1}{\varepsilon}$, будут удовлетворять условию $|x_n-1|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать, что переменная $w_n=(-1)^n$ при неогра-ниченном возрастании n не имеет предела.

Действительно, при возрастании n, переменная w_n не стремится ни к какому числу, попеременно принимая значения 1 и –1, т. е. не имеет предела.

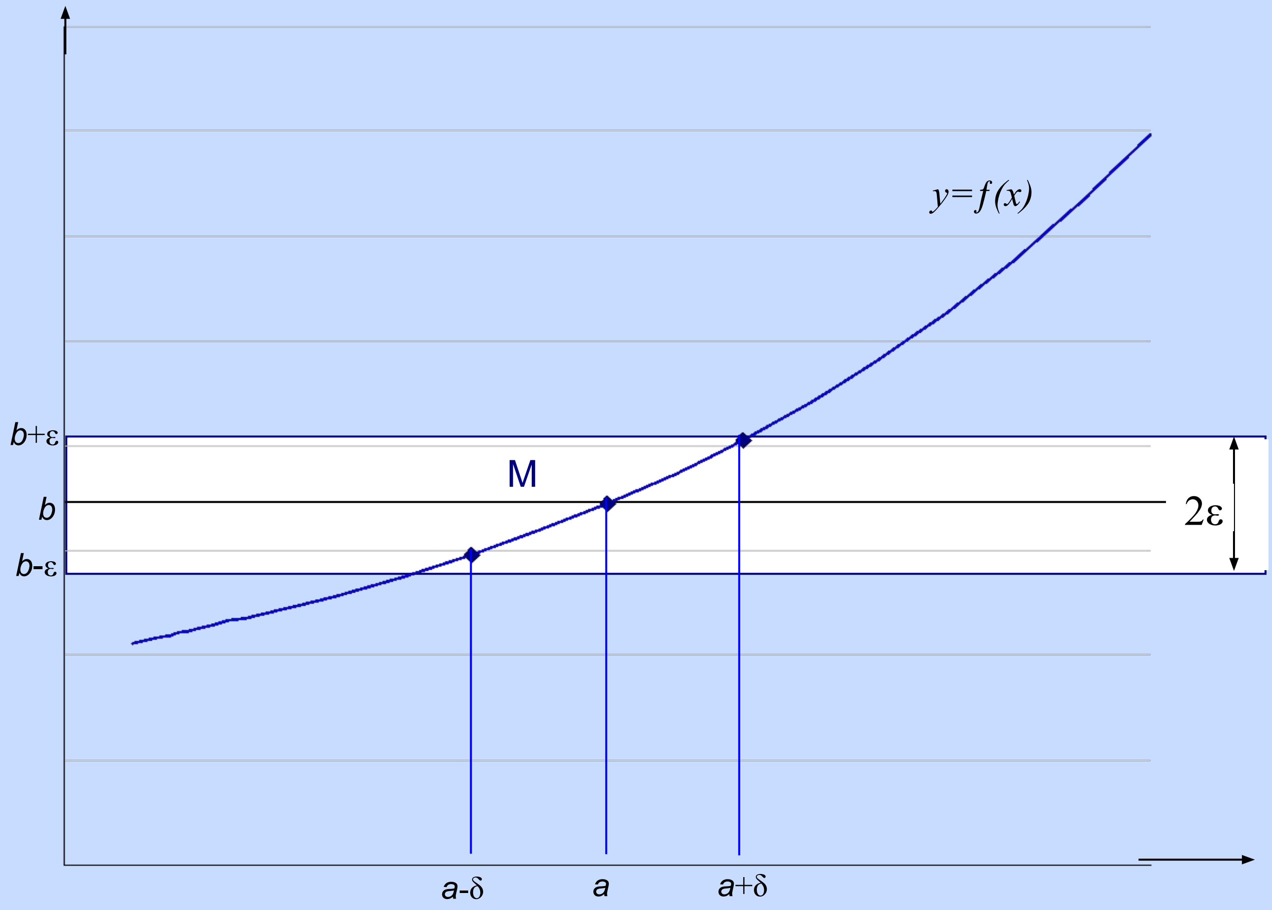
Предел функции

Пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ называется число b, если для любого положительного ε можно указать такое положительное число δ, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. В этом случае пишут:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Если $x \to a$ и $x<a$, то употребляют запись $\lim_{x \to a-0} f(x) = b_1$; если же $x \to a$, но $x>a$, то пишут $\lim_{x \to a+0} f(x) = b_2$. Числа b_1 и b_2 называются соответственно левым и правым пределом функции $y=f(x)$.

Предел функции



Основные свойства пределов

<u>Свойство 1.</u> Предел суммы нескольких переменных равен сумме пределов этих переменных:

$$\lim(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\lim a_1+\lim a_2+\ldots+\lim a_n.$$

<u>Свойство 2.</u> Предел произведения нескольких переменных равен произведению пределов этих переменных:

$$\lim(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)=\lim a_1\cdot\lim a_2\cdot\ldots\cdot\lim a_n.$$

<u>Свойство 3.</u> Предел частного двух переменных равен част-ному пределов этих переменных, если предел знаменателя отли-чен от нуля: $\lim \frac{a}{b} = \frac{\lim a}{\lim b}$, если $\lim b\neq 0$.

<u>Свойство 4.</u> Предел степени равен пределу основания, воз-веденного в степень предела показателя: $\lim a^b=(\lim a)^{\lim b}$.

Основные свойства пределов

Первый замечательный предел: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел: $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e$$

Далее я решил привести некоторые часто встречающиеся типы примеров, рассмотренных мной в ходе работы:

1. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{2}{3}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$$

Основные свойства пределов

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}=\frac{0}{2}=0$$

4. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{5x-1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2x-2}{3x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}=\lim_{x\to 1}\left(\left(1+\frac{2x-2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2x-2}}\right)^{\frac{2x-2}{(3x+1)(\sqrt{x}-1)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(3x+1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{x}+1)}{3x+1}}=e$$

Основные свойства пределов

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{\sec x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x\cdot\cos x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}4\frac{\frac{x}{2}\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=4\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}=4\cdot 1=4$$

6. $$\lim_{u\to 2}\left(\frac{u-2}{u^2-4}+2^{-\frac{1}{(u-2)^2}}\right)=\lim_{u\to 2}\frac{u-2}{(u-2)(u+2)}+\lim_{u\to 2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{(u-2)^2}}=\frac{1}{4}+\lim_{u\to 2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{(u-2)^2}}=\frac{1}{4}$$

Пусть $u=2+a,\ a\to 0.$

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a^2}}=\lim_{a\to 0}\frac{1}{2^{\frac{1}{a^2}}}=0$$

Непрерывность функций

Функция называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и существует предел функции при $x \to x_0$, равный значению самой функции в этой точке. Функция на-зывается непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области. Точка x_0, принадлежащая области опреде-ления функции, называется точкой разрыва, если в этой точки нару-шается условие непрерывности. Если существуют конечные левый и правый пределы функции в точке x_0, а функции определена в этой точке, но эти три числа не равны между собой, то точка x_0 называется точкой разрыва I рода. Точки разрыва, не являющиеся точками разры-ва I рода, называются точками разрыва II рода.

Непрерывность функций

Пример 1. Рассмотрим функцию

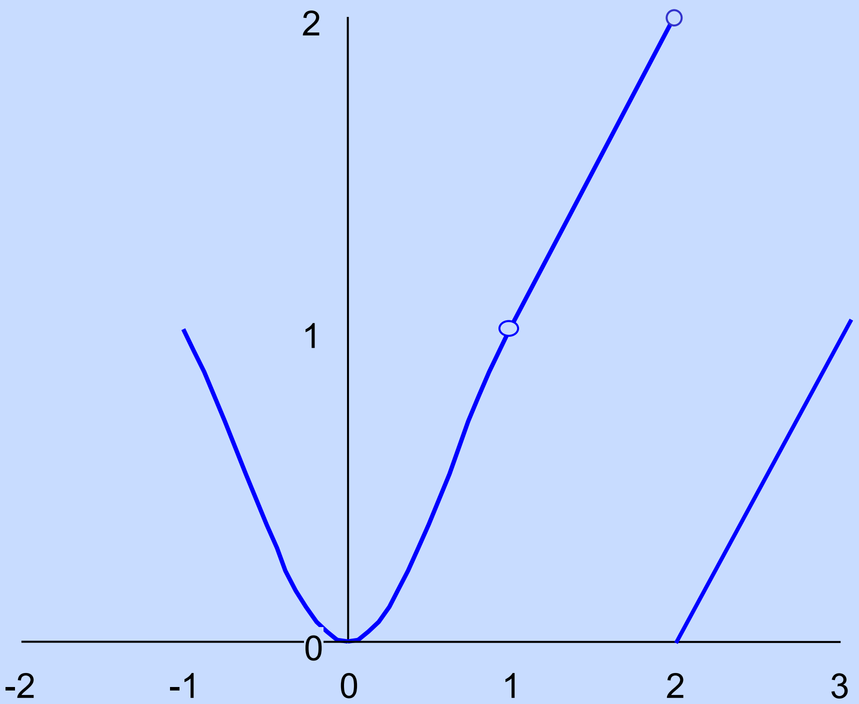
$$f(x)=\begin{cases} x^2, & -1\le x<1\\ x, & 1<x<2\\ x-2, & 2\le x\le 4\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} x^2=1$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} x=1$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} x=2$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} (x-2)=0$$



Непрерывность функций

Пример 2. Определить точки разрыва функции $f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}}$

Данная функция имеет разрыв в точке x=3. Рассмот-рим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to 3+0} f(x) = \infty$$

Функция имеет конечный предел слева, предел же справа является бесконечным. Точка x=3 будет точкой разрыва II рода.