

Научно-исследовательская работа по математике

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ЛИНИЙ

Автор: Гуркин Александр Александрович,
МОУ СОШ №21 г.Подольск, Московская область

Научный руководитель: Буянова Анна Матвеевна,
Учитель математики МОУ СОШ №21 г.Подольск

Найти все точки плоскости XoY , через которые:

(а) проходит только одна парабола;

(б) не проходит ни одна парабола;

(в) проходит более одной параболы семейства

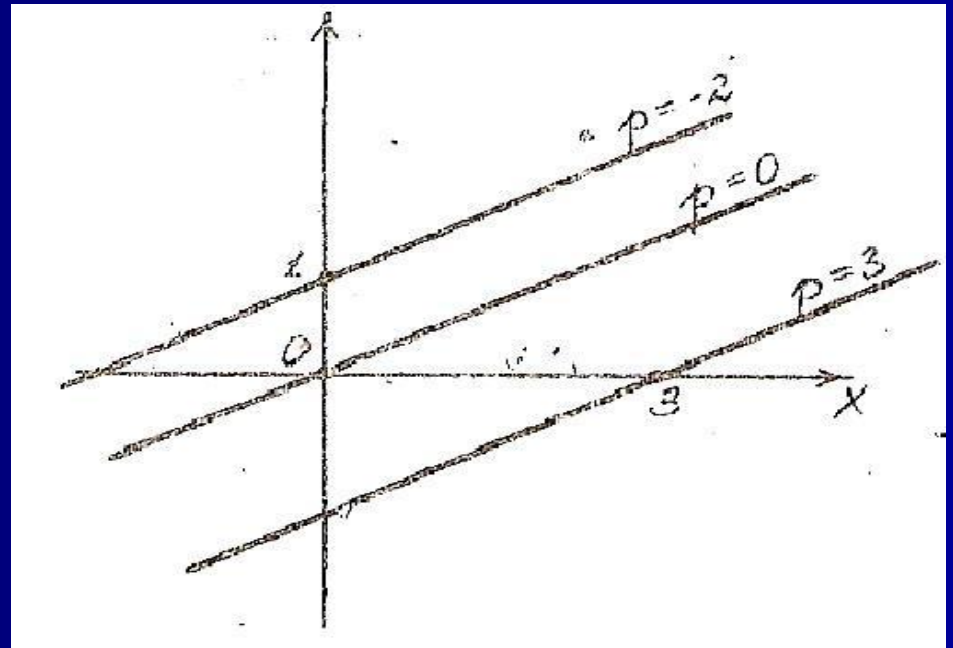
$$y = x^2 + (4p + 2)x + 2p^2$$

$ax+by=p$

Например, уравнение

$$x-2y=p$$

задает семейство
прямых с угловым
коэффициентом $k=1/2$
и пересекающих ось
 Ox в точке $(0; -p/2)$

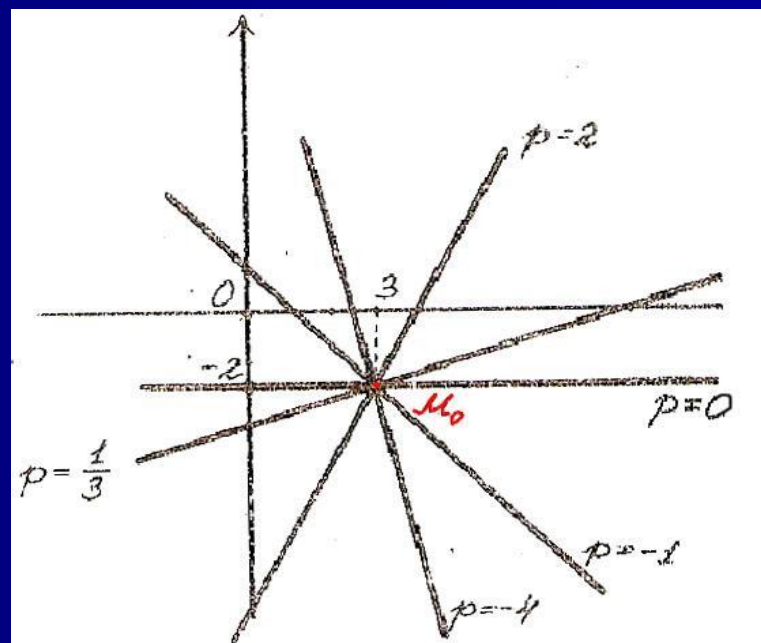


$y-b=p(x-a)$

Например, уравнение

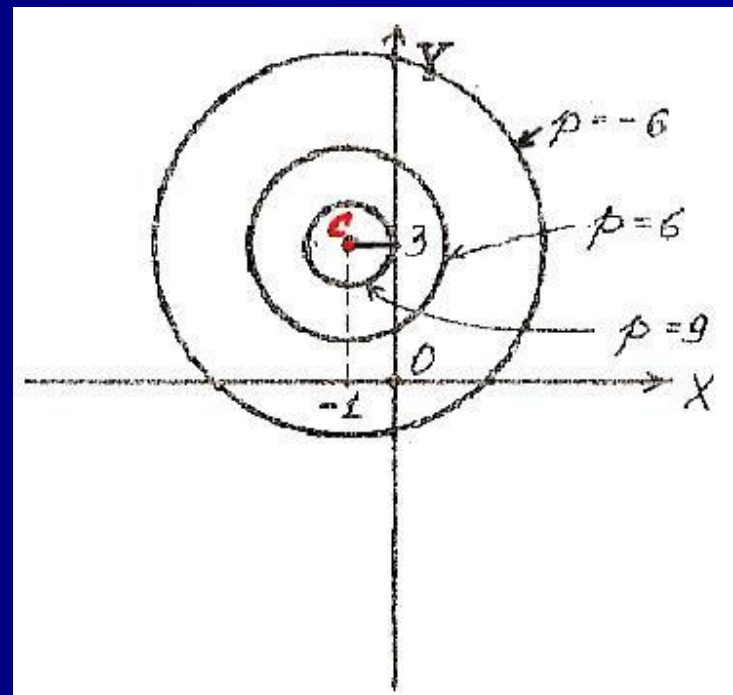
$$y+2=p(x-3)$$

задает семейство
прямых, проходящих
через точку $M_0(3;-2)$



$$(x-a)^2+(y-b)^2=p$$

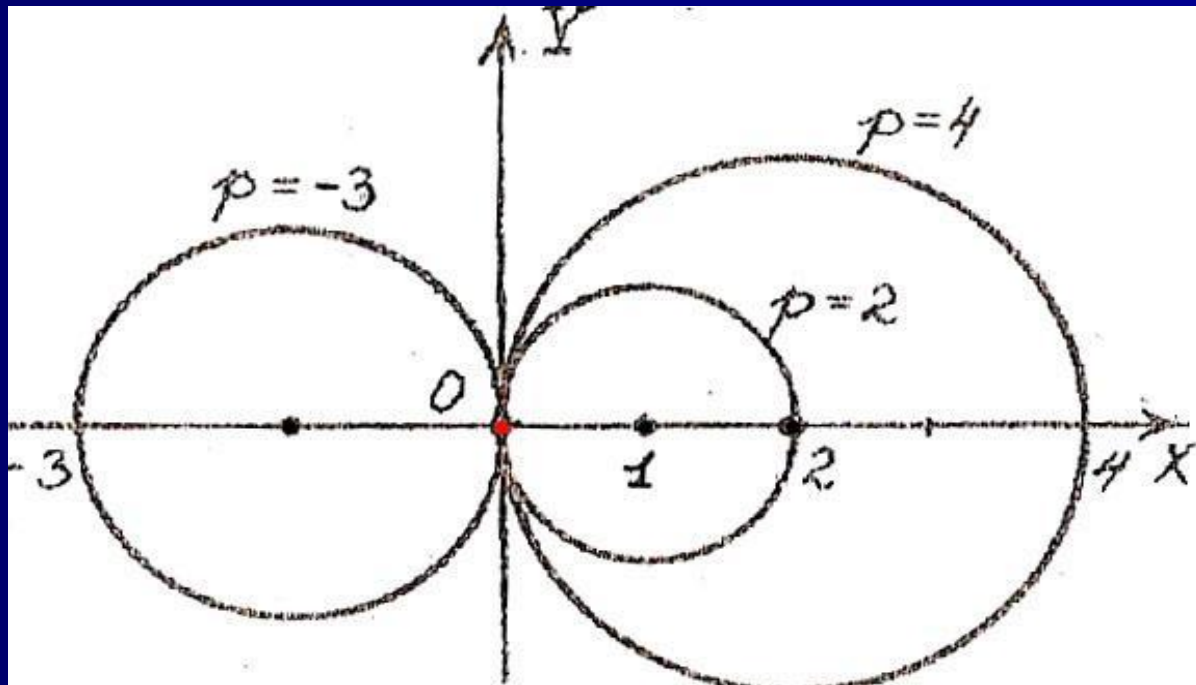
Например, уравнение
 $x^2+2x+y^2-6y+p=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=10-p$
задает (при $p < 10$) семейство окружностей
радиуса $R = \sqrt{10-p}$ с
центром в точке $C: (-1; -3)$



$x^2 + y^2 = px$

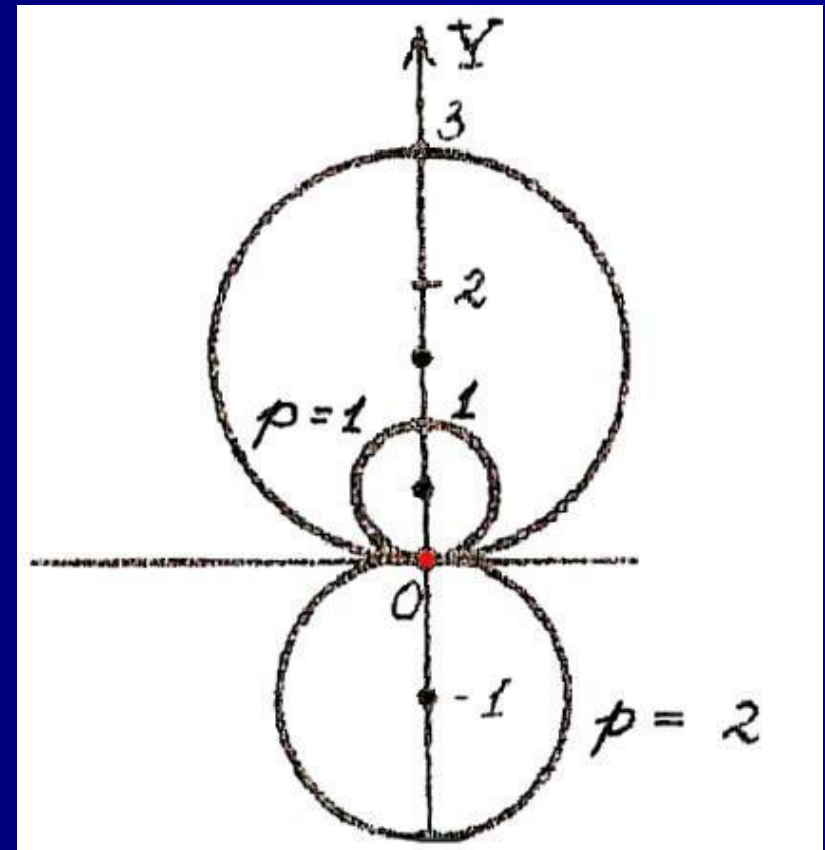
Семейство окружностей радиуса $1/2|p|$ с центром на оси OX в точке $(p/2; 0)$. Все они проходят через начало координат.

Действительно, $x^2 + y^2 = px \Leftrightarrow (x - p/2)^2 + y^2 = p^2/2$



$$x^2 + y^2 = py$$

Семейство окружностей радиуса $1/2|p|$ с центром на оси oY в точке $(0; p/2)$; все они также проходят через начало координат.



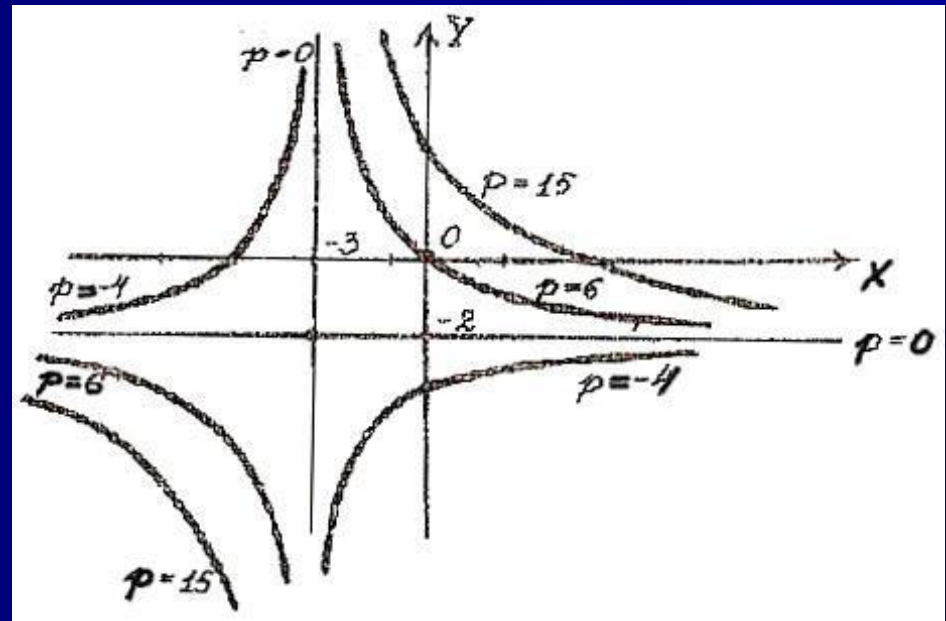
$(x-a)(y-b)=p$

При $p=0$ уравнение задает пару пересекающихся прямых: $x=b$ и $y=p$. При $p \neq 0$ это две ветви гиперболы $y=b(p/x-a)$

Ее асимптотами являются вышеуказанные прямые $x=a$ и $y=b$ точка пересечения которых является их центром симметрии. При $p > 0$ гипербола занимает первую и третью четверти (относительно асимптот),

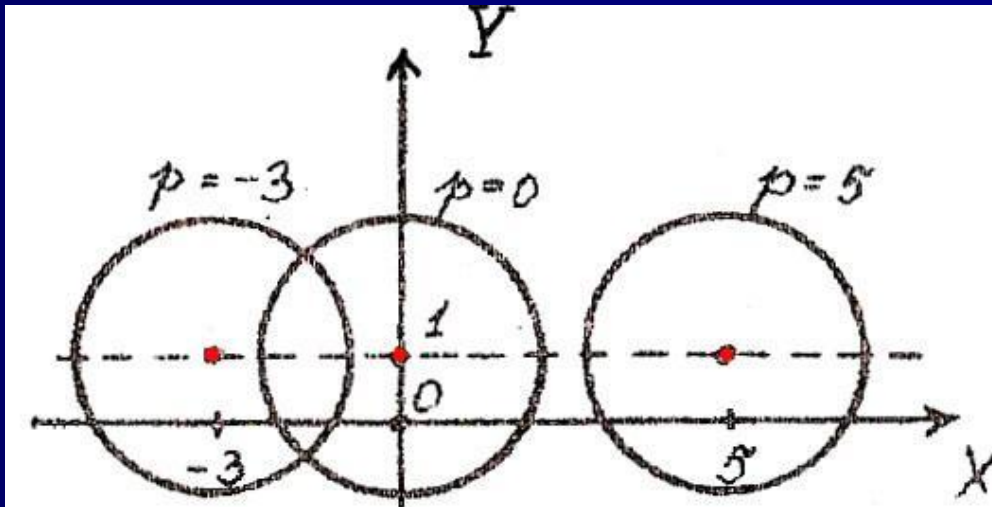
а при $p < 0$ - вторую и четвертую на рисунке представлены линии

семейства $(x+3)(y+2)=p$ для значений $p=0, p=-4, p=6, p=15$.

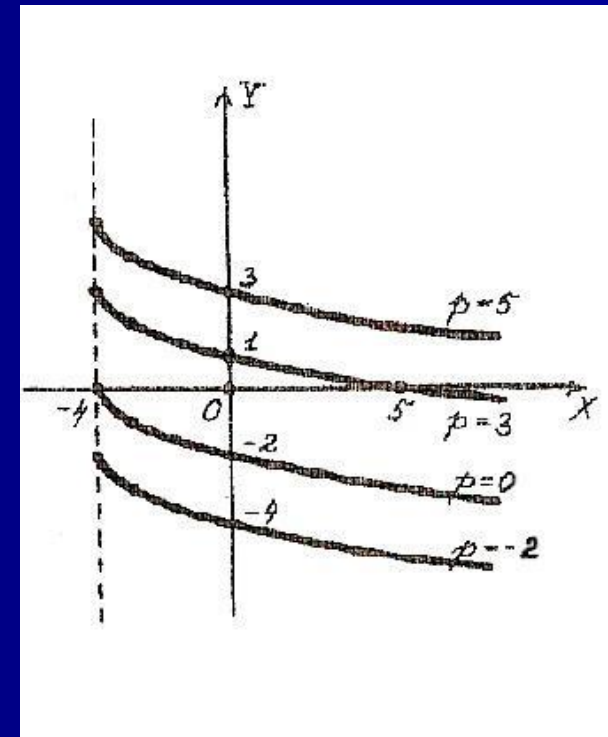


$y=f(x-p)$ $y-p=f(x)$

Например, $(x-p)^2+(y-1)^2=4$ задает семейство окружностей радиуса $R=2$ с центром в точке $C(p;1)$.



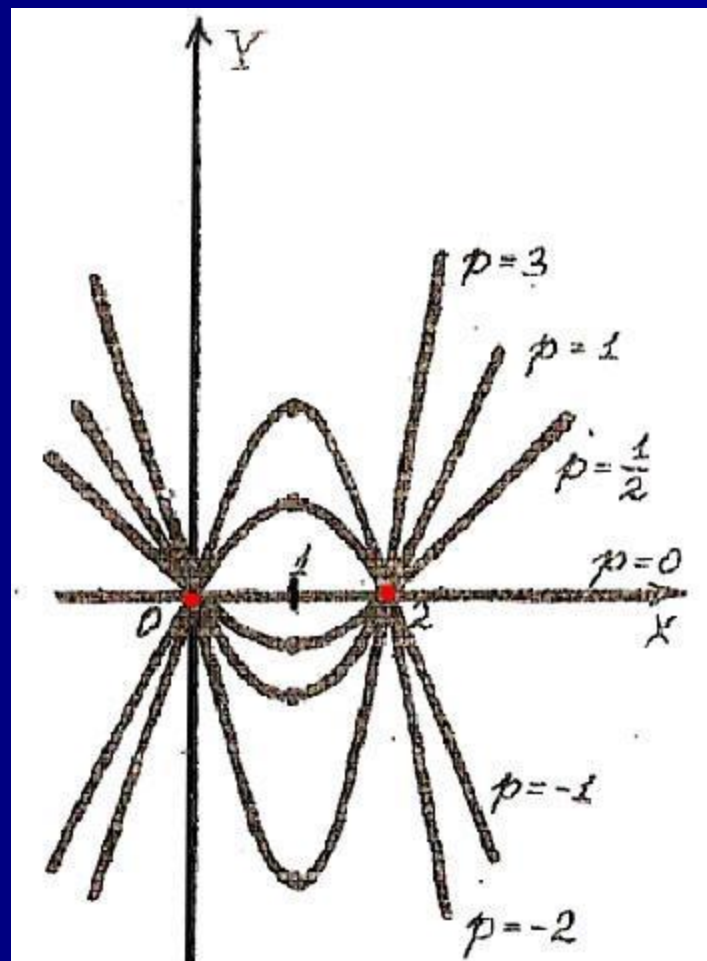
А уравнение $y = p - \sqrt{x+4}$ семейство «полупарабол», получающихся из графика $y = -\sqrt{x+4}$ сдвигом по вертикали на p .



$$y=f(x/p) \quad y/p=f(x)$$

На рисунке представлено семейство парабол $y=p(x^2-2x)$ для значений $p=1, p=3, p=1/2, p=-1, p=-2$ и $p=0$ (это прямая $y=0$).

Все параболы этого семейства пересекают ось OX при $x=0$ и $x=2$.

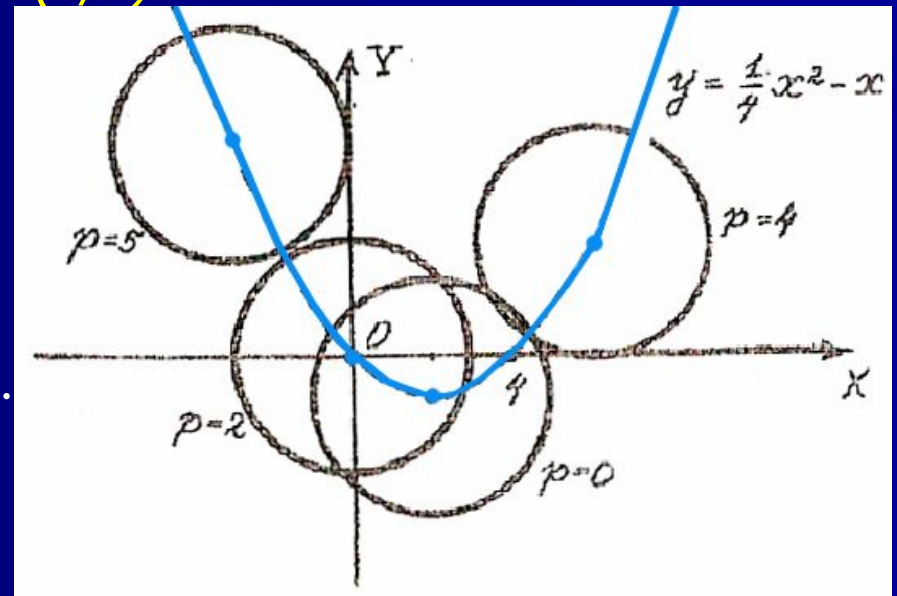


Определить вид семейства линий, заданных данными уравнениями, и нарисовать несколько типичных линий семейства, отвечающих конкретным значениям p

$$(x+p-2)^2+(y-p^2/4+1)^2=9$$

Данное уравнение представляет собой окружность радиуса $R=3$ с центром в точке C с координатами $x = -p+2$ $y = p^2/4-1$.
Исключив из этой системы параметр p , получим уравнение $y = 1/4(x-2)^2 - 1$. Значит, все центры этих окружностей лежат на параболе $y = (1/4)x^2 - x$

$p=0$ (с центром $C(2; -1)$),
 $p=2$ (с центром $C(0; 0)$),
 $p=4$ (с центром $C(6; 3)$),
 $p=5$ (с центром $C(-3; 5 \frac{1}{4})$).

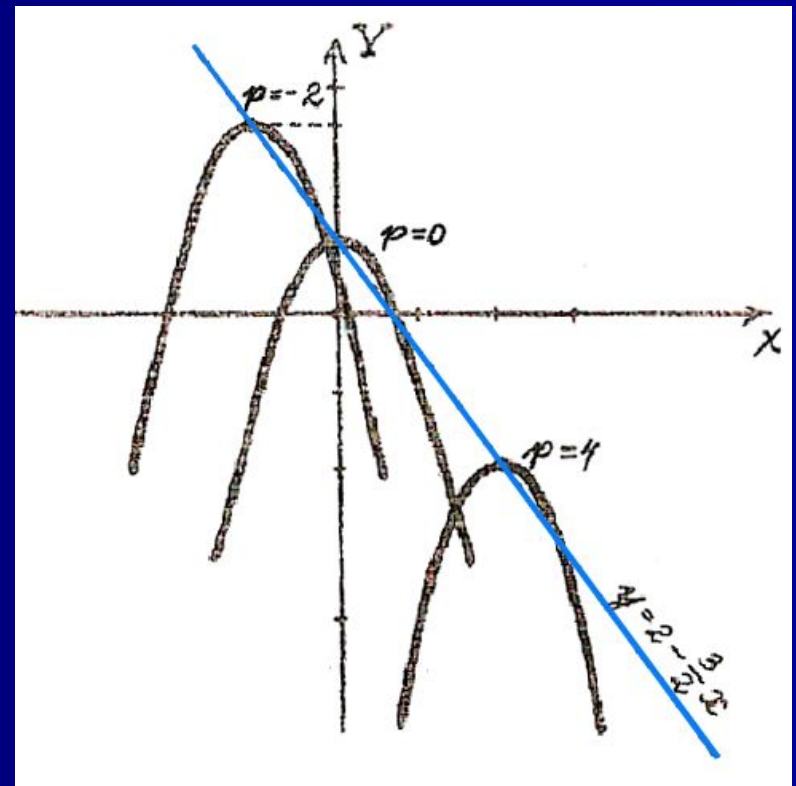


$$y = -x^2 + 4px + 2 - 3p - 4p^2$$

Ясно, что это параболы с ветвями, направленными вниз: $y = -(x-2p)^2 + 2 - 3p$
вершина которых V имеет координаты $x = 2p$ $y = 2 - 3p$ исключив
параметр p из предыдущей системы, получим $y = 2 - 3/2x$

Т. е. все вершины парабол лежат на
Прямой $y = 2 - 3/2x$. Поскольку
коэффициент при x^2 постоянен
(равен -1), то все параболы имеют
одинаковую форму, т.е. получаются
друг из ,друга параллельным
переносом.

Здесь представлены параболы
семейства при
 $p=0$, $p=4$ и $p=-2$.



$$y = x^2 + (4p + 2)x + 2p^2$$

$$D = 8(x^2 - 2x + y)$$

$$(a) D = 0 \Leftrightarrow y = 2x - x^2.$$

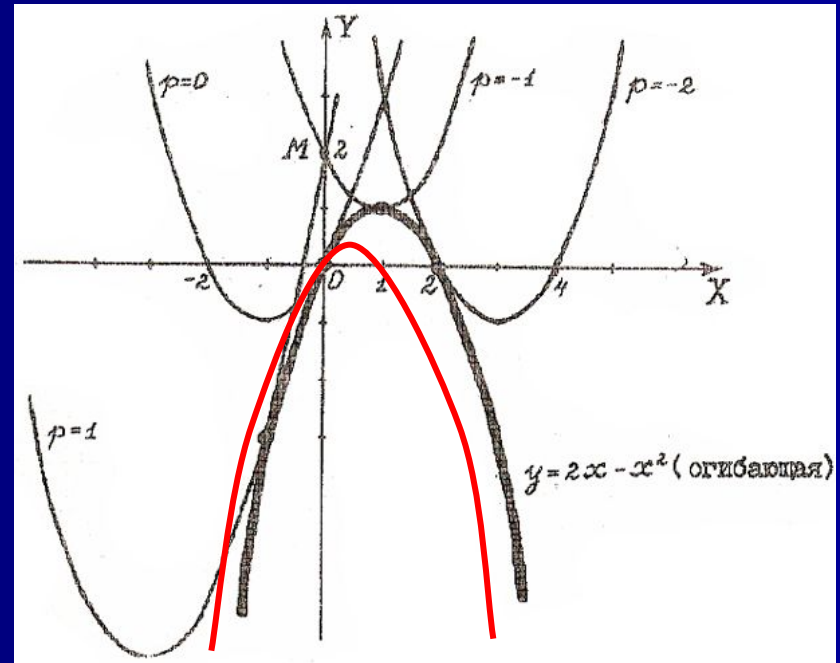
Тогда уравнение имеет одно решение. Это значит, что через каждую точку параболы $y = 2x - x^2$ проходит ровно одна линия семейства, то есть эта парабола касается каждой параболы данного семейства она называется их огибающей.

(б) $D < 0 \Leftrightarrow y < 2x - x^2$, то есть через точки расположенные строго ниже огибающей параболы, не проходит ни одной параболы семейства.

(в) $D > 0 \Leftrightarrow y > 2x - x^2$, тогда квадратное уравнение имеет два решения

$$P_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 - 2x + y/2}$$

Это значит что через каждую точку расположенную строго выше огибающей параболы $y = 2x - x^2$ проходит ровно две параболы данного семейства.



$$p = 1, p = 0, p = -1, p = -2$$

$$y = 2x - x^2 \text{ (оггибающая)}$$