Муниципальное общеобразовательное учреждение «Гимназия»

Логарифмы

Проект ученика 11 класса Говорова Ивана

Руководитель проекта Буравцова Н.И.

Ефремов 2009

Цели проекта:

- обеспечить компьютерную поддержку изучения свойств логарифмов и их применения в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы;
- познакомить учащихся с проявлением и применением

Определение логарифма

<u>Логарифмом</u> положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a *называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.*

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Десятичные логарифмы

Если основание логарифма равно 10, то логарифм называется десятичным:

$$\log_{10} b = \lg b$$

$\lg 10 = 1$

$\lg 100 = 2$

$\lg 1000 = 3$

$\lg 10000 = 4$

$\lg 0,1 = -1$

$\lg 0,01 = -2$

$\lg 0,001 = -3$

$\lg 0,0001 = -4$

Натуральные логарифмы

Если основание логарифма e, то логарифм называется натуральным:

$$\log_{e} b = \ln b, \quad e \approx 2,7$$

Свойства логарифмов, где a и b - положительны
a > 0, a ≠ 1

$$\log_a a = 1$$
$$\log_a a = 1$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$
$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a - \log_a c$$
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a - \log_a c$$

$$\log_a a^c = c$$
$$\log_a a^c = c$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$
$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, (n \in Z)$$
$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, (n \in Z)$$

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r$$
$$\log_a b = \log_{a^r} b^r$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пример:

Вычислите:

1) $\dfrac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3} = \dfrac{\lg(8*18)}{\lg(2^2*3)} = \dfrac{\lg 144}{\lg 12} = \dfrac{\lg 12^2}{\lg 12} = 2$

2) $\log_2 11 - \log_2 44 = \log_2 \frac{11}{44} = \log_2 \frac{1}{4} = -2$

Логарифмирование алгебраических выражений

Если число **Х** представлено алгебраическим

выражением, то логарифм любого выражения можно

выразить через логарифмы составляющих его чисел.

Потенцирование логарифмических выражений

Переход от логарифмического выражения к алгебраическому называется потенцированием, то есть, произвести действие, обратное логарифмированию.

Пример:

Найти x,

если $\log_7 x = 2\log_7 5 + \frac{1}{2}\log_7 36 - \frac{1}{3}\log_7 125$

Решение:

$$\log_7 x = 2\log_7 5 + \log_7 6 - \log_7 5$$

$$\log_7 x = \log_7 5 + \log_7 6$$

$$\log_7 x = \log_7 30$$

$$x = 30$$

Частоту любого звука можно выразить формулой

$$N_{pm} = n \cdot 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)^p$$

Ноте «до» соответствует частота, равная n колебаниям в секунду.

В октаве частота колебаний нижнего звука в 2 раза меньше верхнего.

Тогда ноте «до» 1-й октавы будут соответствовать $2n$ колебания в секунду, а ноте «до» 3-й октавы - $n \cdot 2^m$ колебания в секунду и т.д.

Обозначим все ноты хроматической гаммы номерами p.

Логарифмируя эту формулу, получаем

$$\lg N_{pm} = \lg n + m \lg 2 + p \frac{\lg^2}{12},$$

$$\lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{12} \right) \lg 2.$$

Принимая частоту самого низкого «до» за единицу *n=1* и приводя логарифмы к основанию 2, имеем

$$\log_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

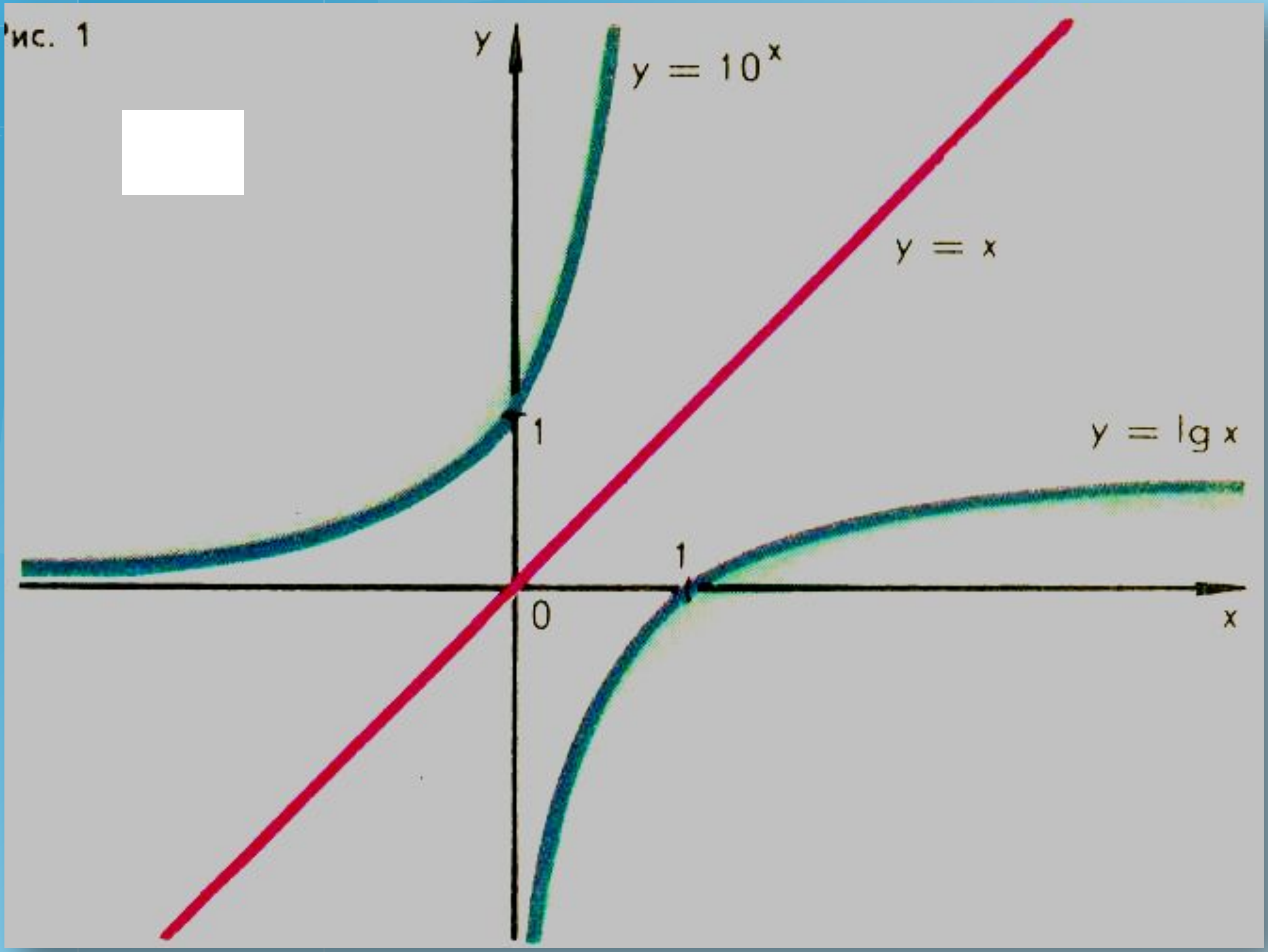
Свойства монотонности логарифмов

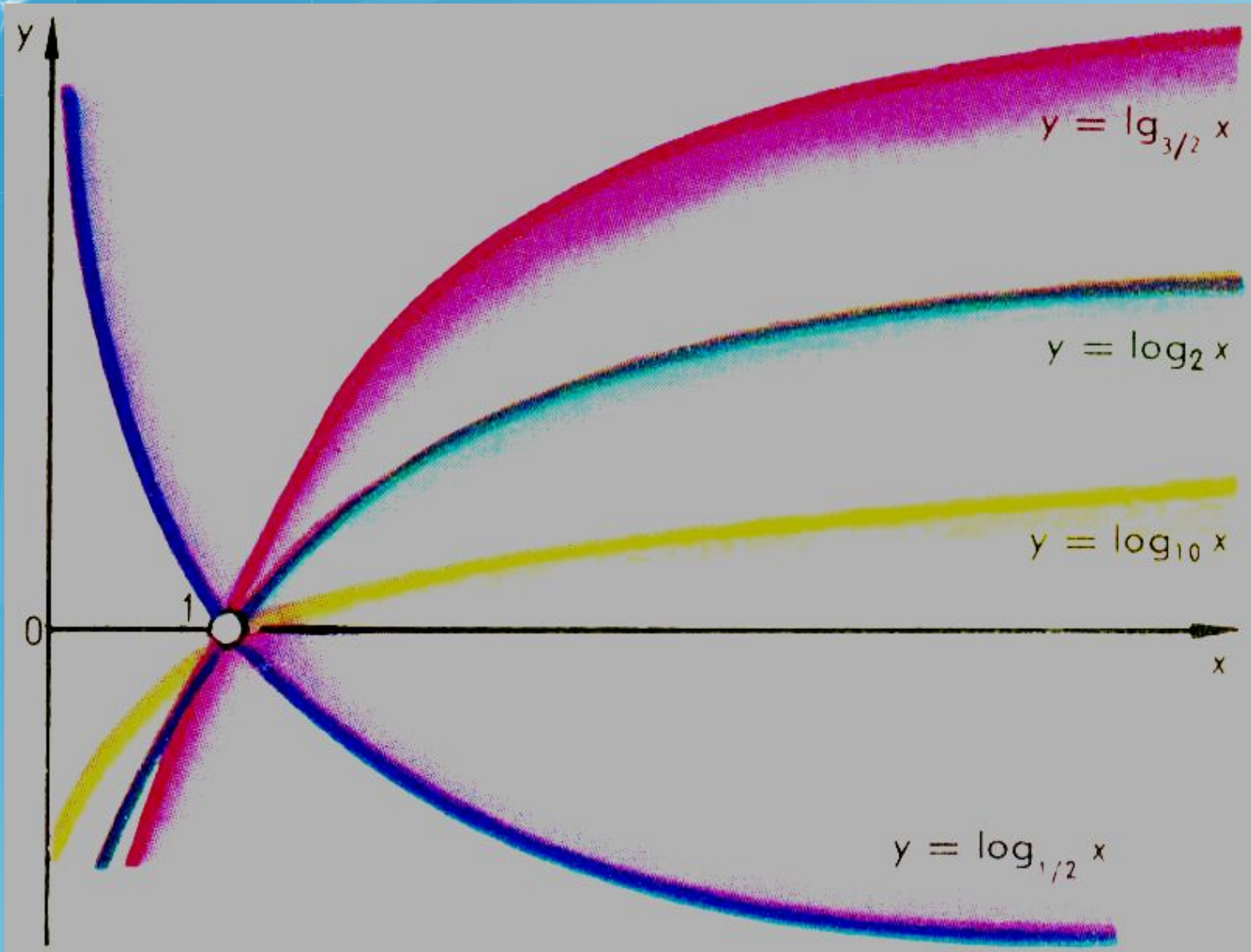
Если a > 1 и b > c, то $\log_a b > \log_a c$ $\log_a b > \log_a c$ $\log_a b > \log_a c$

Если 0 < a < 1 и b > c, то $\log_a b < \log_a c$ $\log_a b < \log_a c$ $\log_a b < \log_a c$

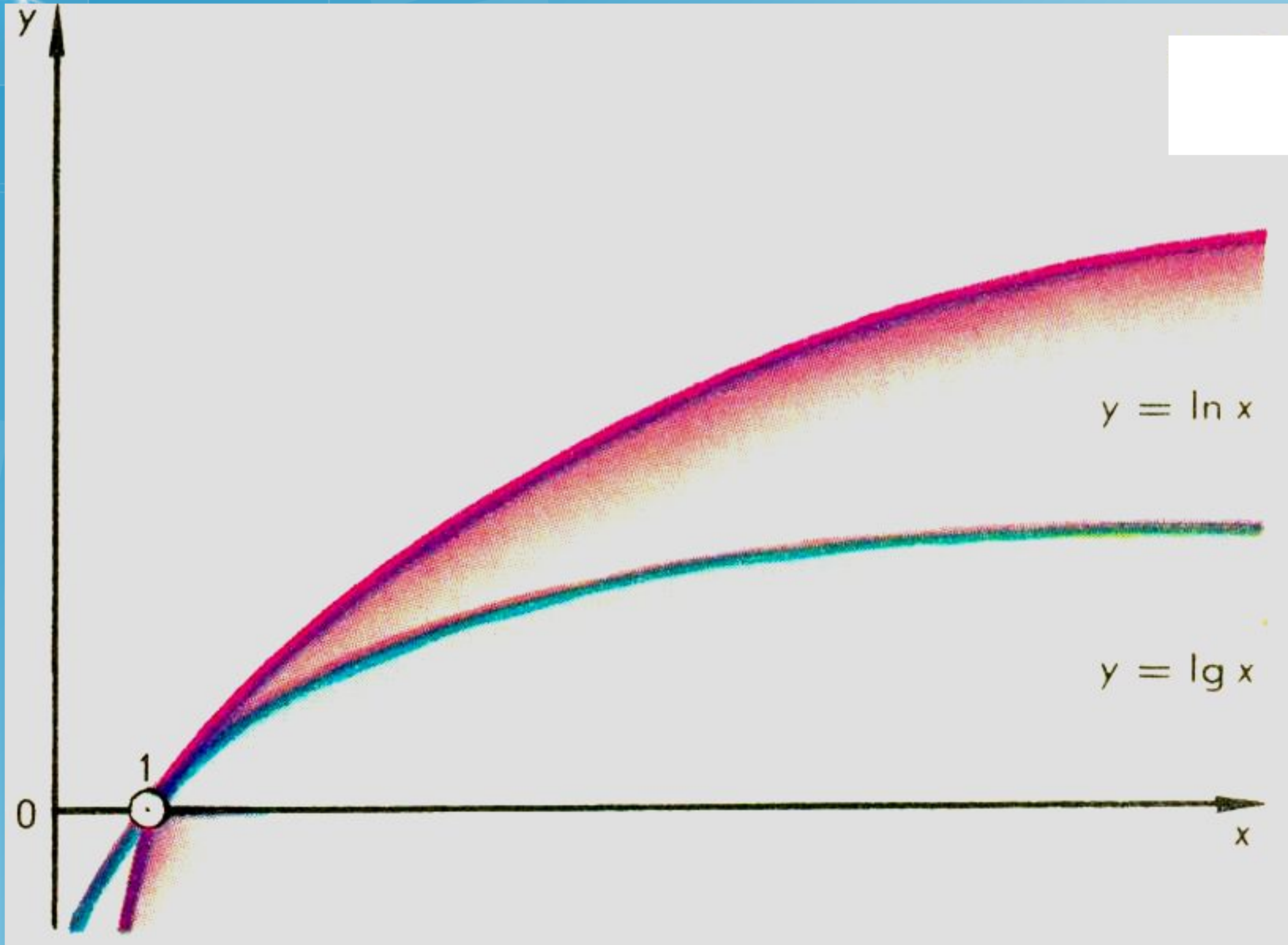
Логарифмическая функция

$y = \log_a x,\ x>0,\ a>0,\ a\neq 1$

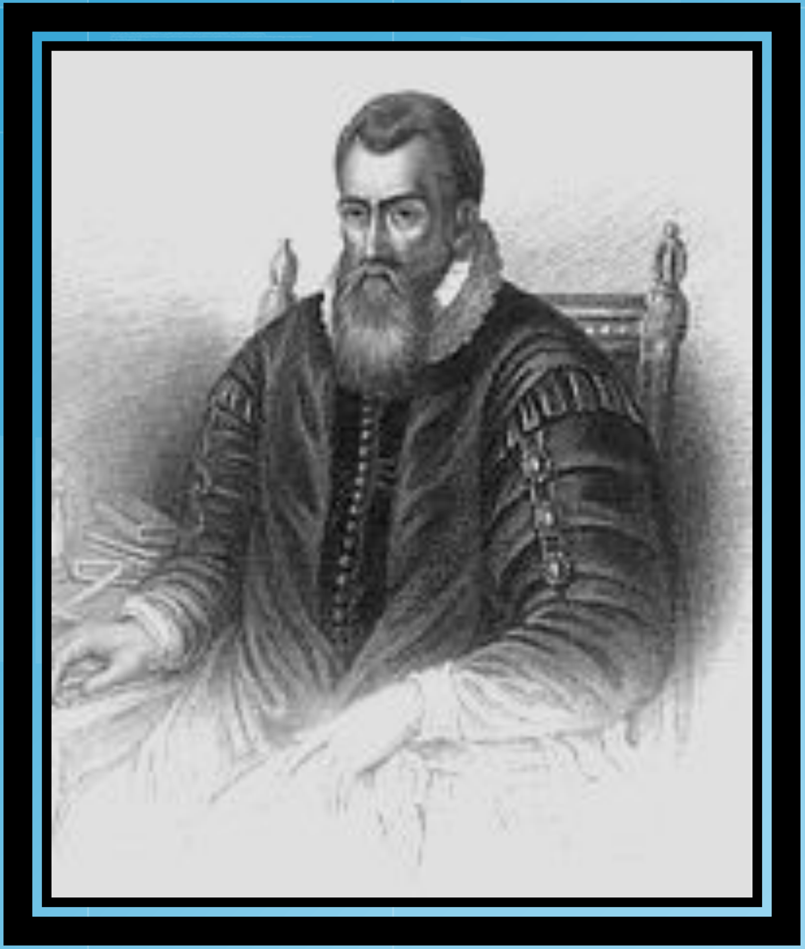




y
x
0
1
y = lg3/2 x
y = log2 x
y = log10 x
y = log1/2 x


y
y = ln x
y = lg x
1
0
x

Джон Непер



(1550 г.— 4 апреля 1617г.)

Шотландский математик - изобретатель логарифмов.

В 1590-х годах пришел к идее логарифмических вычислений и составил первые таблицы логарифмов, однако свой знаменитый труд “Описание удивительных таблиц логарифмов” опубликовал лишь в 1614 году.

Ему принадлежит определение логарифмов, объяснение их свойств, таблицы логарифмов синусов, косинусов, тангенсов и приложения логарифмов в сферической тригонометрии.

Логарифмы в музыке

Даже изящные искусства питаются ею
Разве музыкальная гамма не есть -
Набор передовых логарифмов?

Из «Оды экспоненте»

А.А. Эйхенвальд

Звезды, шум и логарифмы

По вертикальной оси отложим блеск звезд в единицах Гиппарха (распределение звезд по субъективным характеристикам (на глаз) на 6 групп), а на горизонтальной - показания приборов. По графику видно, что объективные и субъективные характеристики не пропорциональны, а прибор регистрирует возрастание блеска не на одну и ту же величину, а в 2,5 раза. Эта зависимость выражается логарифмической функцией.

Логарифм шума

Единица измерения _decibel_ используется в звуковой технике.

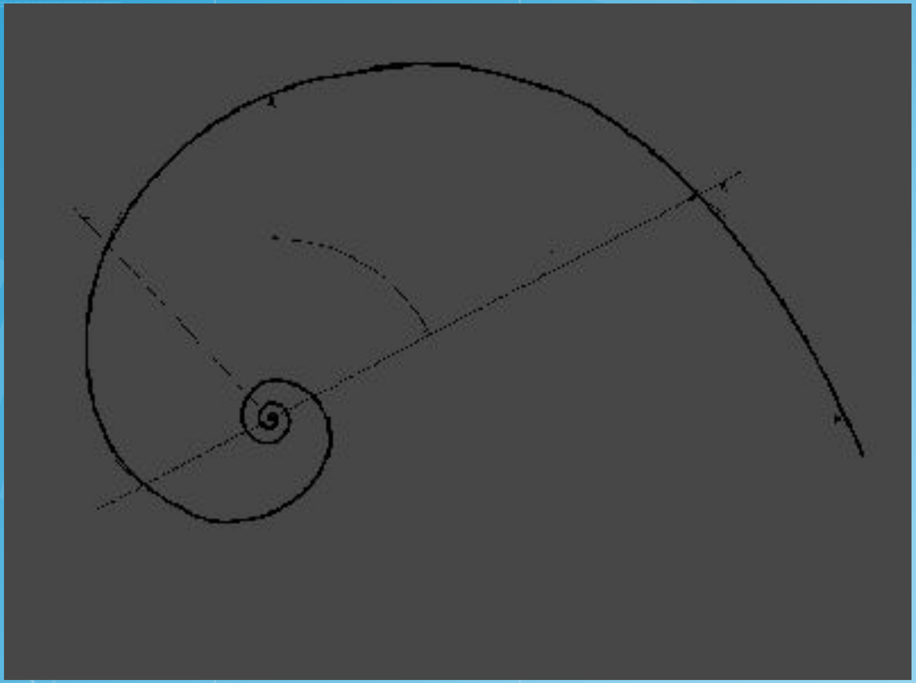
Связано это с тем, что мы реагируем не на абсолютные, а на относительные изменения уровня какого-либо воздействия, в том числе и звукового.

Если сила звука (интенсивность, I, Вт/м2) изменится в 10 раз, то субъективное ощущение громкости — всего лишь на одну ступеньку, при 100-кратном увеличении силы звука — на две (lg100 = 2), при 1000-кратном — на три (lg1000 = 3). Поэтому увеличение или уменьшение силы звука принято измерять в логарифмических единицах и каждое десятикратное изменение силы звука оценивается единицей, называемой ***Бел* (Б).**

На практике используется в основном **единица, равная десятой части *Бела - децибел*.**

Значение в децибелах равно десяти десятичным логарифмам отношения интенсивностей двух сигналов.

Логарифмическая спираль



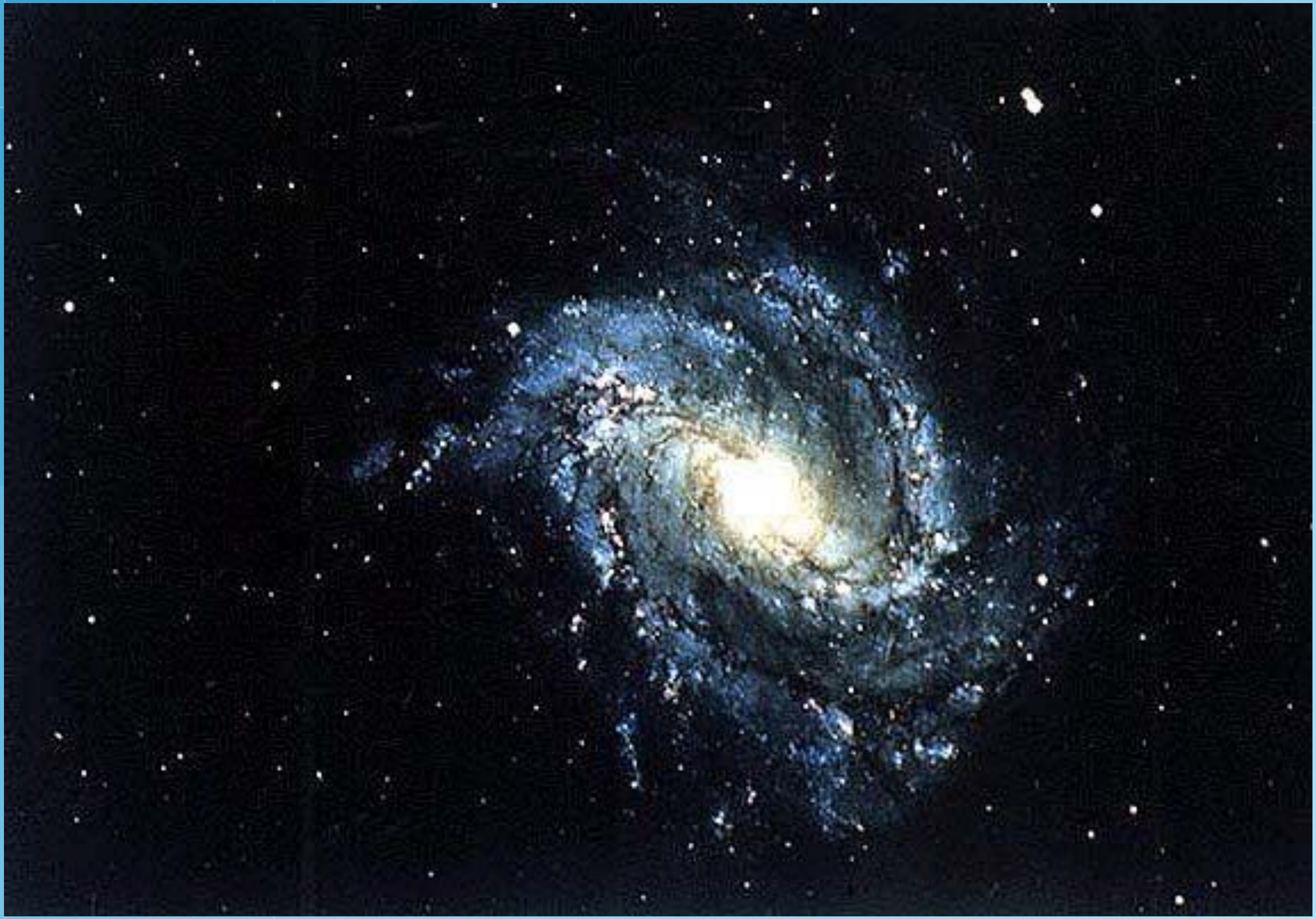
На рисунке видно, что эта спираль пересекает все прямые, проходящие через полюс под одним и тем же углом.

Раковины морских животных могут расти лишь в одном направлении. Чтобы не слишком вытягиваться в длину, им приходится скручиваться, причем каждый следующий виток подобен предыдущему. А такой рост может совершаться лишь по логарифмической спирали или ее аналогиям. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, закручены по логарифмической спирали.

Рога таких животных, как архары, закручены по логарифмической спирали.

В подсолнухе семечки расположены по дугам, близким к логарифмической спирали


По логарифмической спирали
формируется и тело циклона



По логарифмическим спиралям закручены и многие галактики, в частности – Галактика Солнечной системы.

Литература

1. *Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. Москва. Просвещение. 2008 г.*
2. *Журнал «Математика в школе»*
3. *Газета «Математика». Приложение к «Первое сентября».*

Автор идеи

Говоров Иван

Эксперт

Буравцова Надежда Ивановна