

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Работу выполнил:
Кудинов Виктор,
10 класс ГОУ СОШ №1266 г. Москвы.

Руководитель:
Хавжу Инна Сергеевна,
учитель математики

Логарифмические уравнения

Содержание:

1. Свойства логарифмов.
2. Способы решения.
3. При решении уравнений важно помнить...

При решении логарифмических уравнений и неравенств пользуются свойствами логарифмов, а также свойствами логарифмической функции

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1:$$

1) Область определения: $x > 0$;

2) Область значений: \mathbf{R} ;

$$3) \log_a x_1 = \log_a x_2 \quad x_1 = x_2;$$

4) При $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает, при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ убывает при всех $x > 0$, т.е.

$$a > 1 \text{ и } \log_a x_1 > \log_a x_2 \quad x_1 > x_2,$$

$$0 < a < 1 \text{ и } \log_a x_1 > \log_a x_2 \quad x_1 < x_2;$$

Основными методами решения логарифмических уравнений являются следующие:

- решение уравнений на основании определения логарифма;
- метод потенцирования;
- приведение логарифмического уравнения к квадратному, заменой переменной;
- приведение логарифмов к одному основанию;
- решение уравнений логарифмированием обеих частей.

Метод первый: *решение уравнений на основании определения логарифма*

$$\log_{x+1}(2x^2+1)=2$$

По определению логарифма имеем: $2x^2+1=(x+1)^2$,

$$x^2 - 2x = 0 \quad \rightarrow$$

$x=2$ или $x=0$.

Проверка:

$x=0$ не может быть корнем данного уравнения, так как основание логарифма $x+1 \neq 1$.

$$\text{При } x=2 \quad \log_{2+1}(2 \cdot 2^2 + 1) = \log_3 9 = 2.$$

Ответ: 2.

Метод второй: *потенцирование*

$$\log_5 x = \log_5 (6 - x^2)$$

Из равенства логарифмов следует:

$$x = 6 - x^2 \rightarrow$$

$$x = -3 \text{ или } x = 2.$$

Проверка:

$x = -3$ корнем уравнения быть не может, так как логарифмы отрицательных чисел не существуют.

$$\log_5 x = \log_5 2,$$

$$\log_5 (6 - x^2) = \log_5 (6 - 2^2) = \log_5 2.$$

Ответ: 2.

Метод третий: *приведение логарифмического уравнения к квадратному*

$$\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$$

$$\lg^2 x^3 = (\lg x^3)^2 = (3 \lg x)^2 = 9 \lg^2 x \rightarrow$$

$$9 \lg^2 x - 10 \lg x + 1 = 0.$$

Пусть $\lg x = y$, тогда $9y^2 - 10y + 1 = 0$

$$y = 1 \text{ или } y = 1/9$$

$$\lg x = 1 \text{ или } \lg x = 1/9 \rightarrow$$

$$x = 10 \text{ или } x = 10^{1/9}.$$

Проверкой подтверждаем, что оба числа являются корнями.

Ответ: $10; 10^{1/9}$

Метод четвертый: *приведение логарифмов к одному основанию*

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

$$(1/4)\log_2 x + (1/2)\log_2 x + \log_2 x = 7$$

$$(7/4)\log_2 x = 7$$

$$\log_2 x = 4$$

$$x = 16.$$

Ответ: 16.

Метод пятый: логарифмирование обеих частей уравнения

$$x^{\lg x + 2} = 1000$$

Логарифмируя обе части уравнения ($x > 0$), получим:

$$(\lg x + 2) \cdot \lg x = \lg 1000$$

$$\lg^2 x + 2 \lg x - 3 = 0$$

$$\lg x = y \rightarrow$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$y = -3, y = 1.$$

$$\lg x = -3, x = 10^{-3} = 0,001;$$

$$\lg x = 1, x = 10$$

Выполнив проверку, убедимся, что оба найденных значения переменной являются корнями данного уравнения.

Ответ: 0,001; 10.

При решении логарифмических уравнений
следует помнить:

- При переходах от логарифмических уравнений к уравнениям, не содержащим знака логарифма, следует учитывать область допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения.
- Решение большинства логарифмических уравнений после некоторых преобразований сводится к решению логарифмического уравнения вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ или совокупности таких уравнений.

- При решении уравнений, содержащих сумму двух и более логарифмов, следует помнить о том, что равенство $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$, выполняется не при любых значениях переменной, поскольку области определения его левой и правой частей различны. Левая часть определена при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Правая часть определена при $f(x) \cdot g(x) > 0$. Таким образом, область определения правой части равенства $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$ шире области определения его левой части. Поэтому при решении уравнения переход от суммы логарифмов к логарифму произведения может привести к появлению посторонних корней.

- Чтобы этого не случилось, нужно в самом начале решения выписать соответствующие ограничения или, получив корни, сделать проверку.

Преобразование же логарифма произведения в сумму логарифмов таит еще больше опасностей: в этом случае область допустимых значений переменной сужается и при решении уравнения можно потерять корни. Поэтому, если такое преобразование все-таки необходимо, часто приходится рассматривать два случая:

- $f(x) > 0, g(x) > 0$, тогда
$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x);$$
- $f(x) < 0, g(x) < 0$, тогда
$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a (-f(x)) + \log_a (-g(x)).$$

Немного истории:

Джон Непер

(англ. *John Napier*; 1550—1617)
шотландский барон, математик,
один из изобретателей
логарифмов,
первый публикатор
логарифмических таблиц.



Используемая литература

С.М. Никольский , М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин «Алгебра и начала анализа для 10-11 классов», Москва, Просвещение, 2006

С.А. Шестаков «Книга для учителя к Сборнику заданий по алгебре и началам анализа для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы»

М.А. Куканов «Математика. 9-11 классы: решение заданий ЕГЭ высокой степени сложности. Основные методы и приемы», Волгоград, Учитель, 2009