Не нужно нам владеть клинком,
Не ищем славы громкой.
Тот побеждает, кто знаком
С искусством мыслить, тонким.

Английский поэт Уордсворт

КОМБИНАТОРИКА - ПЕРВЫЙ ШАГ В БОЛЬШУЮ НАУКУ.

Автор: Захаров Дмитрий

Содержание

Цель работы

1. Создать справочное пособие для учащихся 10-11 классов, обучающихся на базовом уровне, образовательных учреждений.
2. Подготовить первую часть большого проекта «Теория вероятности как самое встречаемое в нашей жизни явление».

Задачи работы

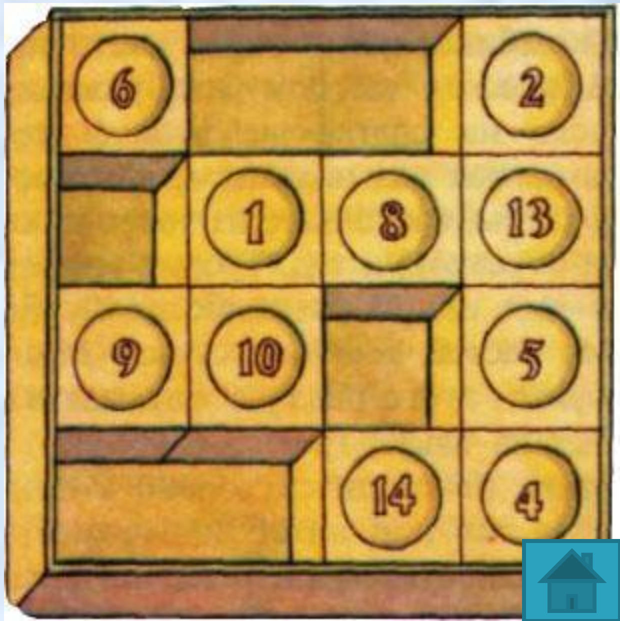
1.1 Подобрать литературу и web – ресурсы по теме «Комбинаторика».
1.2 Исследовать все возможные методы решения комбинаторных задач на основе реальной жизни.
1.3 Проследить историю выделения самостоятельной области математики – комбинаторики.
2.1 Обосновать изучение курса комбинаторики в старшей школе как реальную необходимость при осуществлении курса принципа непрерывности образования «Школа – вуз».
2.2 Наметить возможные варианты введения курса комбинаторики в школьное образовательное пространство.
2.3 Подобрать материал для создания справочника.

Введение

- Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Разные пути или варианты, которые приходится выбирать человеку, складываются в самые разнообразные комбинации. Такие задачи приходиться рассматривать при определении наиболее выгодных коммуникаций внутри города, при организации автоматической системы управления, значит и в теории вероятностей, и в математической статистике со всеми их многочисленными приложениями. И целый раздел математики, называемый комбинаторикой, занят поиском ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или другом случае.

Что же такое «Комбинаторика»?

- Комбинаторика – это раздел математики, в котором исследуются и решаются задачи выбора элементов из исходного множества и расположения их в некоторой комбинации, составленной по заданным правилам.



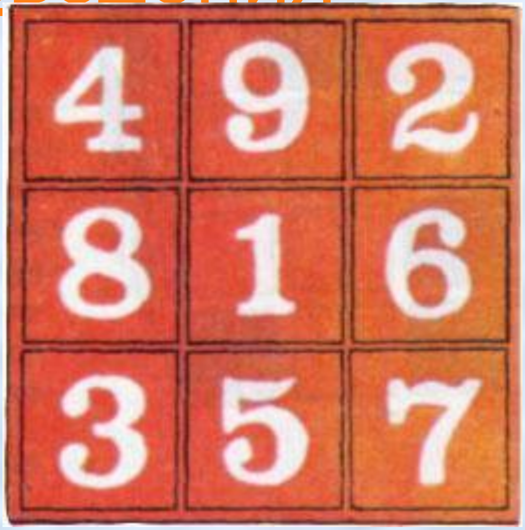
История возникновения

- Комбинаторика как наука стала развиваться в XIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей.
- Первые научные исследования по этой теме принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Чарталье (1499-1557), Г. Галилею (1564-1642) и французским ученым Б.Пискамо (1623-1662) и П. Ферма.
- Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».

Правила решения комбинаторных задач

Правило суммы

Правило произведения



Комбинаци
и

Правило суммы

Задача: На столе лежат 3 черных и 5 красных карандашей. Сколькими способами можно выбрать карандаш любого цвета?

Решение: Выбрать карандаш любого цвета можно 5+3=8 способами.

Правило суммы в комбинаторике*:*

Если элемент а можно выбрать m способами, а элемент в - n способами, причем любой выбор элемента а отличен от любого выбора элементов в, то выбор «а или в» можно сделать m+n способами.

Примеры задач

Примеры решение задач на сложение

Задача: В классе 10 учащихся занимаются спортом, остальные 6 учащихся посещают танцевальный кружок. 1)Сколько пар учащихся можно выбрать так, чтобы один из пары был спортсменом, другой танцором? 2)Сколько возможностей выбора одного ученика?

Решение:

1)Возможность выбора спортсменов 10, а на каждого из 10 спортсменов выборов танцора 6. Значит, возможность выбора пар танцора и спортсмена $10 \cdot 6 = 60$.

2) Возможность выбора одного ученика $10+6=16$.

Правило произведения

Задача : Из города А в город В ведут 3 дороги. А из города В в город С ведут 4 дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С?

Решение: Можно рассуждать таким образом: для каждой из трех путей из А в В имеется четыре способа выбора дороги из В в С. Всего различных путей из А в С равно произведению 3·4, т.е. 12.

Правило произведения:

Пусть нужно выбрать к элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, второй – n_2 способами и т. д., то число способов к элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots$ nк.

Примеры задач

Примеры решения задач на произведение

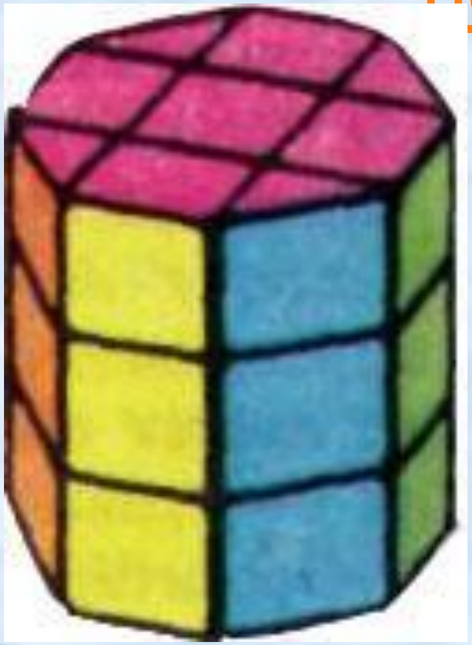
Задача: В школьной столовой имеются 2 первых, 5 вторых и 4 третьих блюд. Сколькими способами ученик может выбрать обед, состоящий из первых, вторых и третьих блюд?

Решение: Первое блюдо можно выбрать 2 способами. Для каждого выбора первого блюда существует 5 вторых блюд. Первые два блюда можно выбрать $2 \cdot 5 = 10$ способами. И, наконец, для каждой 10 этих выборов имеются четыре возможности выбора третьего блюда, т. е. Существует $2 \cdot 5 \cdot 4$ способов составления обеда из трех блюд. Итак, обед может быть составлен 40 способами.

Комбинации

Без повторений

С повторениями



Выборки без повторений

Перестановки

Размещения

Сочетания

Размещения без повторений

- ***Размещением из n элементов по к (к≤n) называется любое множество, состоящее из любых к элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.***

- Количество всех размещений из n элементов по m обозначают:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

n! – факториал числа n

Примеры задач

Примеры задач

Задача: Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

Решение: Два юноши не могут одновременно пригласить одну и ту же девушку. И варианты, при которых одни и те же девушки танцуют с разными юношами считаются, разными, поэтому:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Возможно 360 вариантов.

Перестановки без повторения

- ***Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.***

- Количество всех перестановок из n элементов обозначают P_n

$$P_n = n!$$

Примеры задач

Примеры задач

Квартет
Проказница Мартышка
Осёл,
Козёл,
Да косолапый Мишка
Затеяли играть квартет
…
Стой, братцы стой! –
Кричит Мартышка, - погодите!
Как музыке идти?
Ведь вы не так сидите…
И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.
Вот пуще прежнего пошли у них разборы
И споры,
Кому и как сидеть…

Решение

Решение

- Вероятно, крыловские музыканты так и не перепробовали всех возможных мест. Однако способов не так уж и много. Сколько?

- Здесь идет перестановка из четырех, значит, возможно $P_4 = 4! = 24$ варианта перестановок.

Сочетания без повторений

Сочетанием без повторений называется такое размещение, при котором порядок следования элементов не имеет значения.

Таким образом, количество вариантов при сочетании будет меньше количества размещений.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается:

$$C_n^m = \frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{P}_n^m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Примеры задач

Примеры задач

Задача: Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (*все три кнопки нажимаются одновременно*), если на нем всего 10 цифр.

Решение: Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможно:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120(\textit{вариантов})$$

Выборки с повторениями

Часто в задачах по комбинаторике встречаются множества, в которых какие-либо компоненты повторяются. Например: в задачах на числа – цифры. Для таких задач используются формулы:

$$\mathrm{A}_n^m = n^m$$

Примеры задач

$$C_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = C_{m+n-1}^n$$

Примеры задач

$$\mathrm{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}, \quad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$$

где n-количество всех элементов, $n_1, n_2, \ldots, n_r$-количество одинаковых элементов.

Примеры задач

Примеры задач

Задача: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Решение: Так как порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то это будут размещения с повторениями из пяти элементов по три, а их число равно:

$$\bar{A}_5^3 = 5^3 = 125$$

Примеры задач

Задача: В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных.

Решение: Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пирожные в коробку. Покупки будут различными, если они отличаются количеством купленных пирожных хотя бы одного сорта. Следовательно, количество различных покупок равно числу сочетаний четырех видов пирожных по семь -

$$C_4^7 = \frac{(7+4-1)!}{7!(4-1)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

Примеры задач

Задача: Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

Решение: всего букв 6. Из них одинаковы n_1«а»=3, n_2 «н»=2, n_3«с»=1. Следовательно, число различных перестановок равно

$$P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$$

Список используемой литературы и web-ресурсов

- Гитман М.Б., Цылова Е.Г. Введение в комбинаторику и теорию вероятностей. Учеб. пособие.: Пермь, 1999
- Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998.
- История математики с древнейших времён до начала XIX столетия / Под ред. А.Н. Колмогорова, А.П. Юшкевича. М: Наука, 1970-1972. Т.1-3.
- Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989.
- Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка данных. М.: Мнемозина, 2005
- http://portfolio.1september.ru
- http://ru.wikipedia.org

Заключение

- Мы считаем, что работа достигла своих целей.
- Мы составили справочное учебное пособие, которое нацелено оживить школьную математику введением в неё интересных задач, посильных для учащихся теоретических вопросов.
- Работа предназначена для учащихся 10-11 классов, обучающихся на базовом уровне, образовательных учреждений для углубления знаний по математике
- Отличительной способностью данного пособия являются:
  - посильная для учащихся III ступени теоретическая часть;
  - подбор и составление задач на основе жизненного материала, сказочных сюжетов.
- Мы надеемся, что наша работа заинтересует учащихся, поможет развитию их кругозора и мышления, будет способствовать более качественной подготовке к сдаче единого государственного экзамена.

Страница автора

- Ученик: Захаров Дмитрий
- Класс: 10
- Руководитель: Торопова Нина Анатольевна
- МОУ «Средняя образовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов №5» г. Красноярска