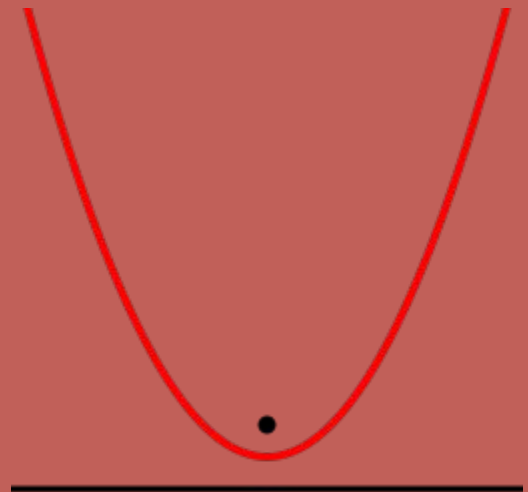
исследовательская работа

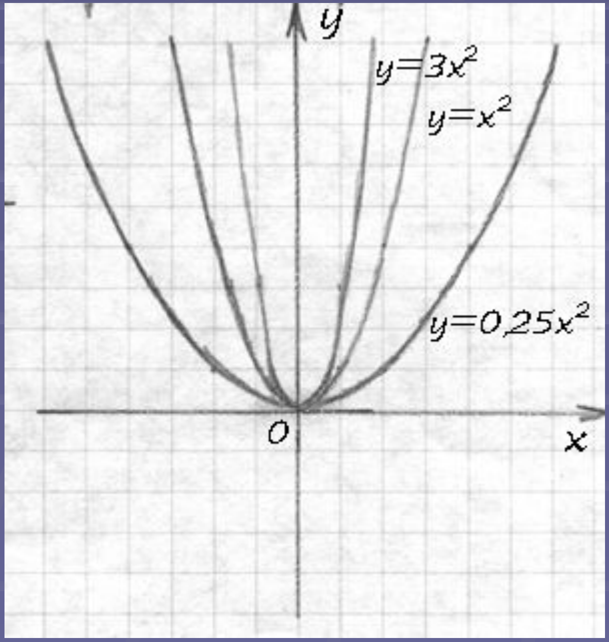
«Квадратичная функция и её применение при решении задач с параметрами»

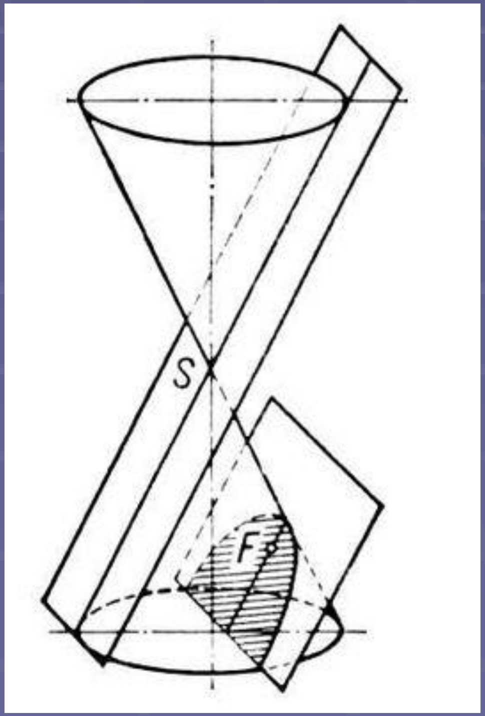


Выполнил: Половинкин Никита,
ученик 10 «а» класса

«Метод решения хорош, если с самого
начала мы можем предвидеть – и далее подтвердить это,
- что, следуя этому методу, мы достигнем цели».
Лейбниц, Opuscules

Цель работы: показать, как использование свойств квадратичной функции, помогает при решении задач с параметрами.





Введение.

Параметр – это буквенная часть, которую содержит уравнение, не считая неизвестную переменную. Буквенная часть (параметр) может скрывать целое «семейство» чисел, при подстановке которых уравнение становится верным.

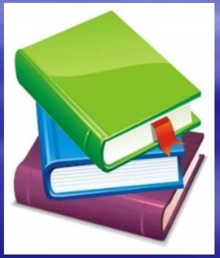
Решить задачу с параметрами – это значит установить, при каких значениях параметров она имеет решения, и найти эти решения (как правило, в зависимости от параметров), то есть решение подобных задач должно сопровождаться исследованием.

Хотя для решения задач с параметрами не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки школьной программы, необходимость проводить исследование значительно осложняет решения задач этого типа.

Для достижения указанной цели нам необходимо было решить следующие **задачи.**

- Ознакомиться со свойствами квадратичной функции, в частности, с взаимным расположением корней в зависимости от значений коэффициентов.
- Изучить методы решения задач с параметрами, выделив те, где используются свойства квадратичной функции.
- Сделать подборку задач, позволяющих проиллюстрировать эти методы.
- Подобрать задачи для самостоятельного решения.
- Сделать обзор литературы по этой теме.
- Оформить презентацию

.



Выбранная тема является **актуальной,** т.к. задачи с параметрами данного типа встречаются на ЕГЭ и олимпиадах.

Практическая значимость – данная работа может быть использована школьниками при подготовке к вступительным экзаменам, к ЕГЭ.

1 Задачи на определение числа решений

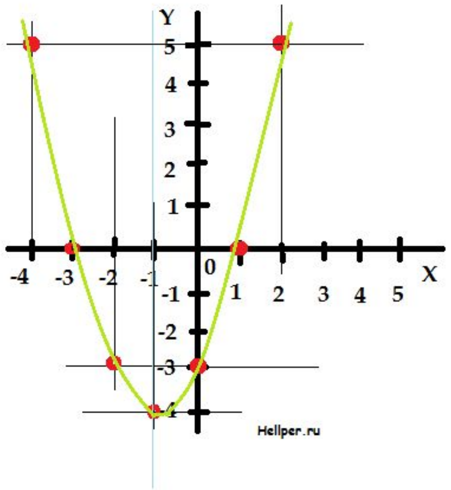
Выделяют три основных подхода к решению задач с параметрами:

- аналитический метод решения,
- графический метод с использованием координатной плоскости $(x; y)$
- ,координатно-параметрический метод с использованием плоскости $(x; a)$, где a- параметр

1.1 Аналитический метод

Аналитический метод является наиболее трудоемким, но, в то же время, наиболее строгим методом решения. При наличии времени можно рекомендовать его использование для подкрепления правоты полученных результатов после предварительного применения одного из графических методов и получения ответа.

Характерной особенностью аналитических методов решения является использование «двойственной» природы параметра, с которым можно обращаться как с обычным числом до тех пор, пока этому не препятствует его неизвестность.



$$x = \frac{-b}{2a}$$

1.1.1 Примеры применения

$$\frac{x^2 - ax + 1}{x+3} = 0$$

имеет единственное решение?

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x + 3 \neq 0. \end{cases}$

Поэтому задачу можно сформулировать иначе, а именно: при каких значениях параметра *a* система $\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$

имеет единственное решение? Ясно, что если при некотором значении *a* система имеет единственное решение, то это происходит в одном из двух следующих случаев.

Случай 1. Уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$

имеет единственное решение, и при этом отличное от числа - 3.

Случай 2. Уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$

имеет два различных решения, и при этом одно из них равно числу -3.

Выясним, при каких значениях *a* реализуется случай 1. Для этого подсчитаем дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - ax + 1$

и приравняем его к нулю. В результате получим

$D = a^2 - 4 = 0$, откуда $a_1 = -2$ и $a_2 = 2$

Полученные значения a должны быть проверенны на предмет выполнения условия $x \neq -3$

. С этой целью подставим полученные значения a в уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ и убедимся, что при $a_1 = -2$ оно имеет единственное решение $x = -1$

, а при $a_2 = 2$ оно имеет единственное решение $x = 1$

, каждое из которых отлично от числа -3. Таким образом, значения $a_1 = -2$ и $a_2 = 2$ являются искомыми.

Выясним теперь, при каких значениях параметра a реализуется случай 2. Поскольку, в силу самого определения случая 2, число $x = -3$ является решением уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$

, подставим его в это уравнение и получим, что $3a + 10 = 0$, откуда $a = -\frac{10}{3}$

Найденное значение a опять-таки требует проверки, которая должна выяснить, не является ли число $x = -3$ двукратным корнем уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$. Если бы это было именно так, то найденное значение $a = -\frac{10}{3}$ пришлось бы «забраковать».

Однако проверка показывает, что при $a = -\frac{10}{3}$ уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$, помимо решения $x = -3$, имеет еще решение $x = -\frac{1}{3}$. Следовательно, значения $a = -\frac{10}{3}$ также является искомым.

Ответ: $a_1 = -2,\ a_2 = 2,\ a_3 = \frac{10}{3}.$

1.2 Графический метод

1.2.1 Суть алгоритма

В данном разделе рассматриваются задачи, при решении которых, помимо аналитических методов, применяются некоторые графические приёмы.

Графический метод прост и нагляден, но пользоваться им нужно с большой аккуратностью, подкрепляя, увиденное на чертеже, необходимыми аналитическими выкладками.

1.2.2 Примеры применения

Пример 1.2.1 Найти число корней уравнения $\left|x^2-2x-3\right|=a$ в зависимости от параметра a

Решение. Построим графики функций, стоящих в левой $\left(y=\left|x^2-2x-3\right|\right)$, и правой $(y=a)$ частях уравнения.

Для построения графика функции $y=\left|x^2-2x-3\right|$ сначала построим график функции $y=x^2-2x-3$, а затем ту его часть, которая окажется под осью Ox симметрично отобразим относительно оси OX

Что же касается графика $y=a$, то это горизонтальная прямая. На чертеже она изображена для случая $a<0$.

Увеличивая a, мы заставляем эту прямую, оставаясь всё время горизонтальной, перемещаться вверх. Поскольку число корней исходного уравнения равно числу общих точек, которые имеют два указанных графика, то ответ непосредственно усматривается из чертежа (рис. 1).

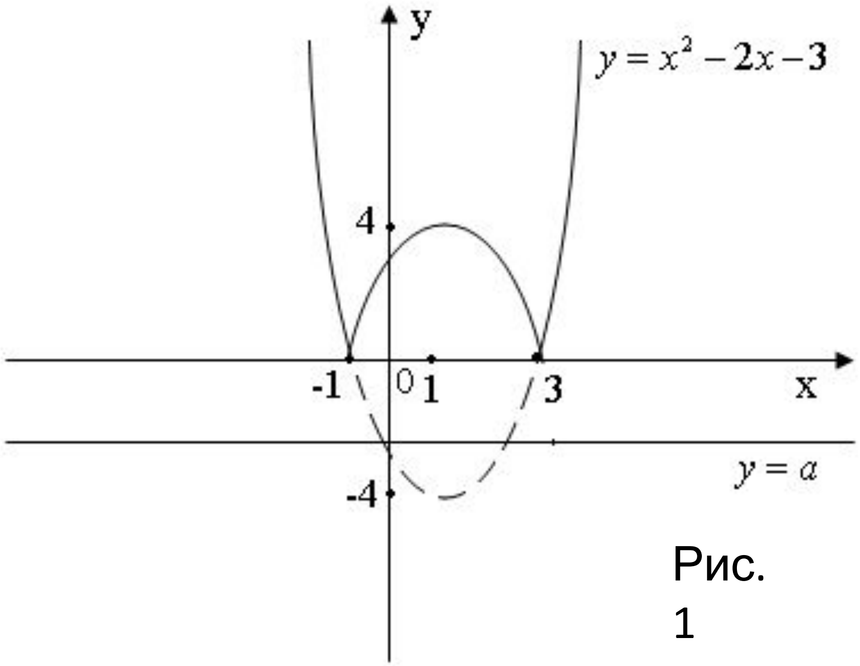


Рис. 1

Ответ: если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то два корня;

если $0 < a < 4$, то четыре корня; если $a = 4$, то три корня;

если $a > 4$, то два корня.

1.3 Координатно-параметрический метод

1.3.1 Суть алгоритма

Координатно-параметрический метод основан на нахождении множества всех точек плоскости, значения координаты *x* и параметра *a* каждой из которых удовлетворяют заданному в условиях задачи условию (соотношению). Если указанное множество точек найдено, то можно каждому допустимому значению параметра

$$a = const$$

поставить в соответствие координаты *x* точек этого множества, дающие искомое решение задачи, или указать те значения параметра, при которых задача не имеет решения.

Пример 1.3.1 Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(2-x)(x+1)=a$ имеет два различных неотрицательных корня.

Решение. На координатно-параметрической плоскости aOx множество всех точек (a,x), значения координаты и параметра каждой из которых удовлетворяют данному уравнению, представляет собой параболу – график функции

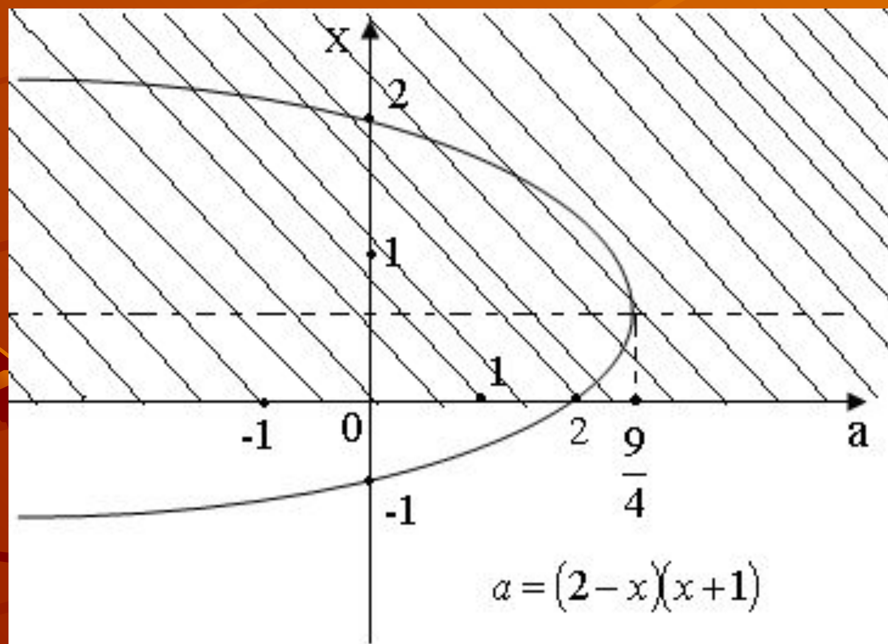
$$a = (2-x)(x+1)$$

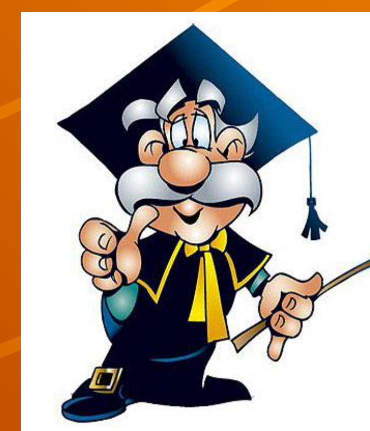
Парабола пересекает ось Ox в точках $(0,-1)$ $(0,2)$ ось Oa в точке $(2,0)$.

Вершина параболы $\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)$

В ней оба корня совпадают

При $2 \le a < \frac{9}{4}$ оба корня неотрицательны (Рис. 5).





Ответ: $2 \le a < \frac{9}{4}$

2 Теорема Виета
2.1 Основные теоретические сведения

Известно, что если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C, \quad A \neq 0$, то

$$Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1)$$

Равенство (1) дает возможность установить следующие соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{C}{A}. \end{cases}$$

Утверждение, выраженное соотношениями (2), носит название теоремы *Виета.* Теорема Виета имеет очень большое практическое значение и часто используется при решении различных задач, в том числе и задач с параметрами. С помощью этой теоремы можно легко устанавливать знаки корней (или формулировать условия, определяющие заданные знаки корней), вычислять по коэффициентам уравнения некоторые выражения, зависящие от корней уравнения, не вычисляя самих корней, решать системы вида:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases} \qquad (3)$$

2.2 Примеры применения

Пример 2.2.1 Найдите значения a, при котором один корень уравнения

$x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$ вдвое больше другого.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения. Тогда, учитывая условие $x_2=2x_1$ и теорему Виета, получаем систему:

$$\begin{cases} x_1+2x_1=1-2a, \\ 2x_1^2=a^2+2. \end{cases}$$

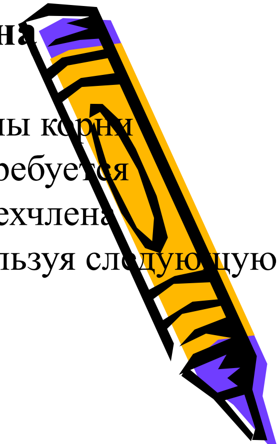
$$\begin{cases} x_1+2x_1=1-2a, \\ 2x_1^2=a^2+2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1-2a}{3}, \\ 2x_1^2=a^2+2, \end{cases} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1-2a}{3}\right)^2=a^2+2 \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{1-2a}{3}\right)^2=a^2+2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1-4a+4a^2}{9}\right)=a^2+2 \Leftrightarrow 2-8a+8a^2=9a^2+18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+8a+16=0 \Leftrightarrow (a+4)^2=0 \Leftrightarrow a=-4.$$

Ответ: $a=-4$

3 Расположение данного числа относительно корней квадратного трехчлена



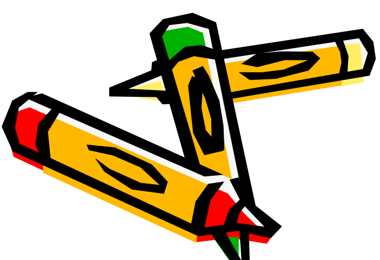
3.1 Основные теоретические сведения

Исследования знака дискриминанта позволяют установить, действительны или комплексны корни квадратного трехчлена. Однако для целого ряда задач этого оказывается недостаточно и требуется еще установить, как расположены на числовой оси действительные корни квадратного трехчлена относительно каких-либо фиксированных точек числовой оси. Это удается сделать, используя следующую серию теорем.

Теорема 1. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $x^2 + px + g$ были действительными и оба больше, чем число λ (т. е. были расположены на числовой оси правее точки λ), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} D = p^2 - 4g \ge 0, \\ x_0 = -\dfrac{p}{2} > \lambda, \\ f(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + g > 0. \end{cases}$$

Теорема 2. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $x^2 + px + g$ были действительными и один из них был меньше, чем число λ, а другой больше чем число λ (т.е. были расположены на числовой оси по разные стороны от точки λ), необходимо и достаточно, чтобы



$$f(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + g < 0.$$

Теорема 3. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $x^2 + px + g$

были действительными и оба меньше, чем число λ
(т.е. были расположены на числовой оси левее, чем точка λ λ), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} D = p^2 - 4g \geq 0, \\ x_0 = -\dfrac{p}{2} < \lambda, \\ f(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + g > 0. \end{cases}$$

3.2 Примеры применения данной теории

Пример 3.2.1 Найти все значения a , при которых уравнение $(2-x)(x+1) = a$

имеет два различных неотрицательных решения.

Решение. Исходная задача эквивалентна следующей: найти все значения *a*, при которых число нуль расположено не правее двух различных корней данного уравнения.

$$(2-x)(x+1) = a \quad \Leftrightarrow 2x - x^2 + 2 - x = a \Leftrightarrow x - x^2 + 2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 + a = 0.$$

То есть $f(x) = x^2 - x - 2 + a$ и возможна одна из следующих ситуаций: (см. рис. 16 и рис.17).

Где x_1 x_2 - корни уравнения, причем $x_1 < x_2$ $\lambda = 0.$

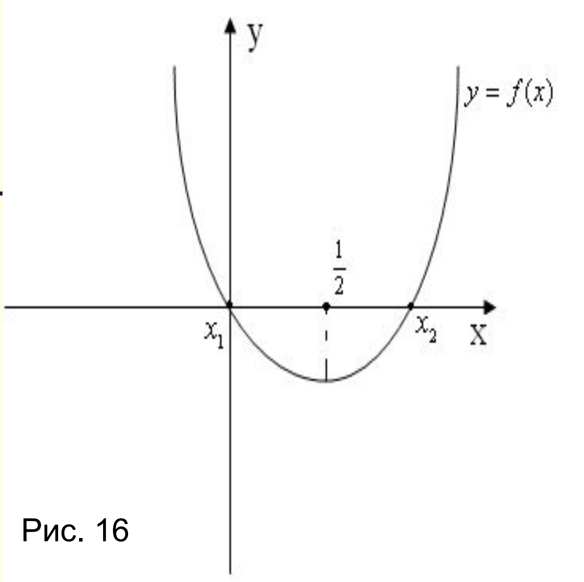


Рис. 16

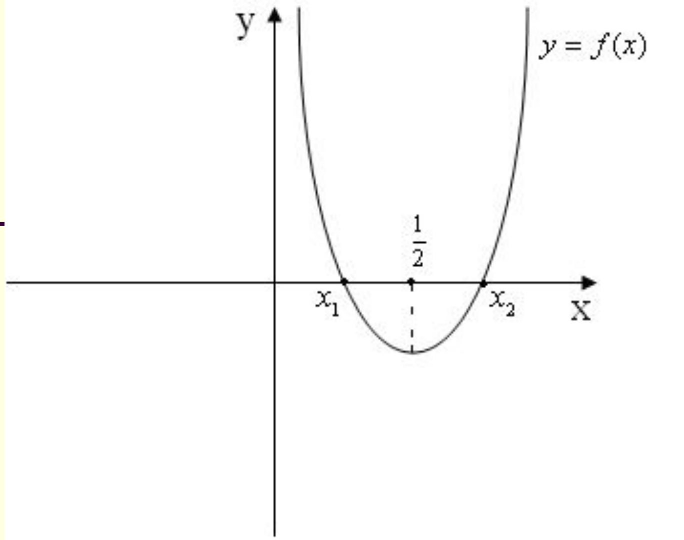


Рис. 17

Опираясь на теоремы 1 и 3, мы получаем, что искомые значения a должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(0) \geq 0, \\ 0 < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Последнее условие означает, что вершина параболы $f(x) = x^2 - x - 2 + a$ расположена правее нуля. В нашем случае, это выполняется для любых a

. Второе условие дает $f(0) = a - 2 \geq 0,$ т.е. $a \geq 2.$

Чтобы это уравнение имело два действительных различных корня, достаточно, чтобы его дискриминант

$$D = 1 - 4(a-2) = 1 - 4a + 8 = 9 - 4a$$

был положителен, т.е. чтобы было $a < \frac{9}{4}.$

Итак, для всех значений a из промежутка $2 \le a < \frac{9}{4}$

число нуль расположено не правее двух различных корней данного уравнения. Указанный промежуток дает решение поставленной задачи.

Ответ: $2 \le a < \frac{9}{4}.$

4 Задачи ЕГЭ

Пример 4.3 (С-5) Пусть А – множество тех значений параметра a

$x_1^3+x_2^3\le 27$ x_1 и x_2

$x^2-ax+3-a=0.$

$x_1^2+x_2^2.$

Решение. Уравнение имеет два различных действительных корня, если дискриминант квадратного трехчлена положителен, т. е. $D=a^2+4a-12>0$, что дает нам первое условие: $a\in(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$

По теореме *Виета* $x_1+x_2=a,\ x_1x_2=3-a.$

Так как $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2),$ то условие $x_1^3+x_2^3\le 27$

$a^3-3(3-a)\cdot a\le 27.$

$$a^3-3(3-a)a\le 27\Leftrightarrow a^3-9a+3a^2-27\le 0\Leftrightarrow a(a^2-9)+3(a^2-9)\le 0\Leftrightarrow (a^2-9)(a+3)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(a+3)(a+3)\le 0\Leftrightarrow (a-3)(a+3)^2\le 0\Leftrightarrow \quad (-\infty;3].$$

Учитывая первое условие, получаем, что $\begin{cases} a\in(-\infty;-6)\cup(2;+\infty), \\ a\in(-\infty;3]. \end{cases}$ Т.е. $A=(-\infty;-6)\cup(2;3].$

Рассмотрим теперь величину $x_1^2+x_2^2.$

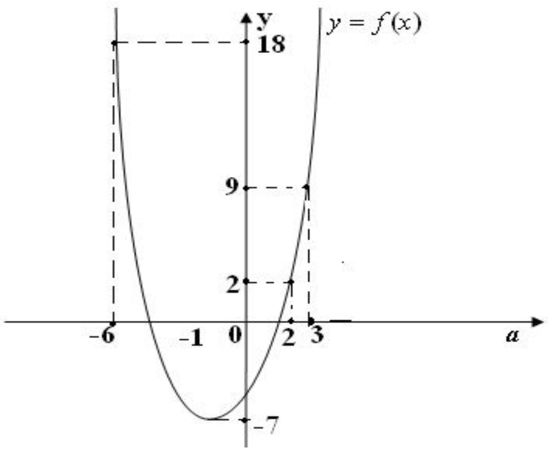
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2= \quad a^2+2a-6=a^2+2a+1-7=(a+1)^2-7,$$

где $a\in(-\infty;-6)\cup(2;3]$

Рассматривая функцию $\varphi(a) = (a+1)^2 - 7$

$(-\infty;-6) \cup [2;3]$

она принимает значения $[2;9] \cup (18;+\infty)$, т.к $f(-6) = 18,\ f(2) = 2,\ f(3) = 9$



Ответ: $[2;9] \cup (18;+\infty)$.

Заключение

Рассмотрев наиболее распространенные методы решения подобных задач: аналитический, графический, координатно-параметрический и теорему Виета, мы пришли к выводу, что каждый из них является эффективным для своего определенного круга задач. Более наглядным является координатно-параметрический метод, так как позволяет явно увидеть, при каких значениях параметра выполняются требуемые условия.

Выбранная тема является актуальной, т.к. задачи с параметрами данного типа встречаются на ЕГЭ и олимпиадах. В школьных учебниках же практически нет заданий на эту тему. Однако овладение методикой их решения нам кажется необходимым: оно существенно повышает уровень логической подготовки, позволяет чуть по-новому, как бы изнутри, взглянуть на такие «банальные» функциональные зависимости, подробно анализируемые школьной программой, как, к примеру, линейные или квадратные многочлены.

Практическая значимость – данная работа может быть использована школьниками при подготовке к вступительным экзаменам, к ЕГЭ.