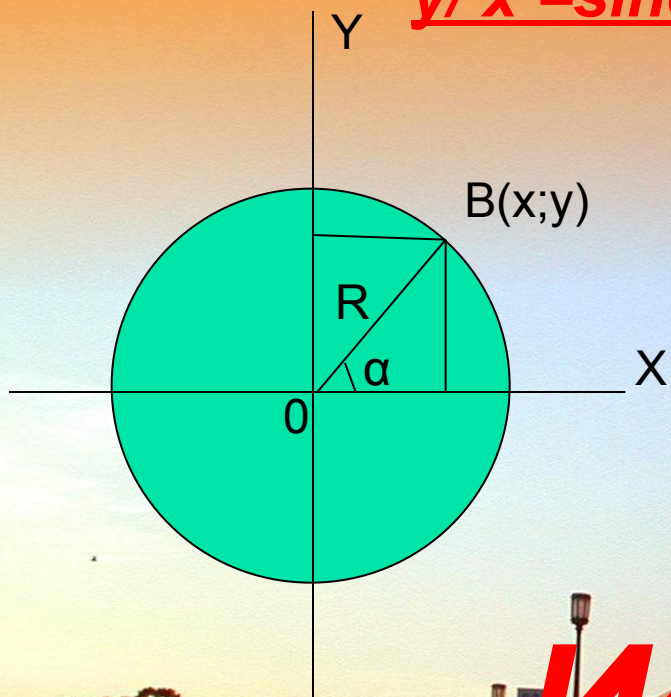


$y/x = \sin\alpha$



# *История развития тригонометрии*



# Вступление

---

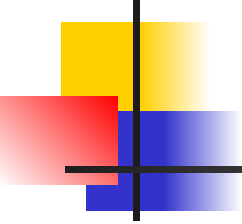
- Слово тригонометрия впервые встречается в 1505 году в *заглавии книги* немецкого математика *Питискуса*.
- Тригонометрия – слово греческое и в буквальном переводе означает *измерение треугольников*.
- В данном случае измерение треугольников следует понимать как решение треугольников, т.е. определение сторон, углов и других элементов треугольника, если даны некоторые из них. Большое количество практических задач, а также задач планиметрии, стереометрии, астрономии и других приводятся к задаче решения треугольников.
- Возникновение тригонометрии связано с *землемерием, астрономией и строительным делом*.

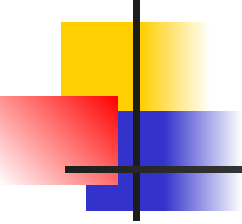


# История становления тригонометрии

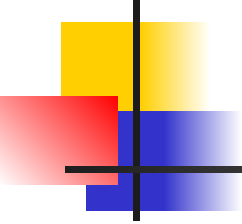
---

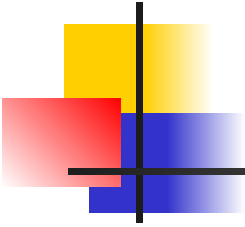
- Хотя название науки возникло сравнительно недавно, многие относимые сейчас к тригонометрии понятия и факты были известны ещё две тысячи лет назад.
- Впервые способы решения треугольников, основанные на зависимостях между сторонами и углами треугольника, были найдены древнегреческими астрономами *Гиппархом* (2 в. до н. э.) и *Клавдием Птолемеем* (2 в. н. э.). Позднее зависимости между отношениями сторон треугольника и его углами начали называть тригонометрическими функциями.

- 
- 
- Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые Аль-Батани (850-929) и Абу-ль-Вафа, Мухамед-бен Мухамед (940-998), который составил таблицы синусов и тангенсов через  $10'$  с точностью до  $1/604$ .
  - Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201-1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе «Трактат о полном четырехстороннике» изложил плоскую и *сферическую тригонометрию* как самостоятельную дисциплину.

- 
- 
- Долгое время тригонометрия носила чисто *геометрический* характер, т. е. факты, которые мы сейчас формулируем в терминах тригонометрических функций, формулировались и доказывались с помощью геометрических понятий и утверждений. Такою она была еще в средние века, хотя иногда в ней использовались и аналитические методы, особенно после появления логарифмов.
  - Начиная с XVII в., тригонометрические функции начали применять к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, распространения волн, движения различных механизмов, для изучения переменного электрического тока и т. д. Поэтому тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались, и приобрели важное значение для всей математики.

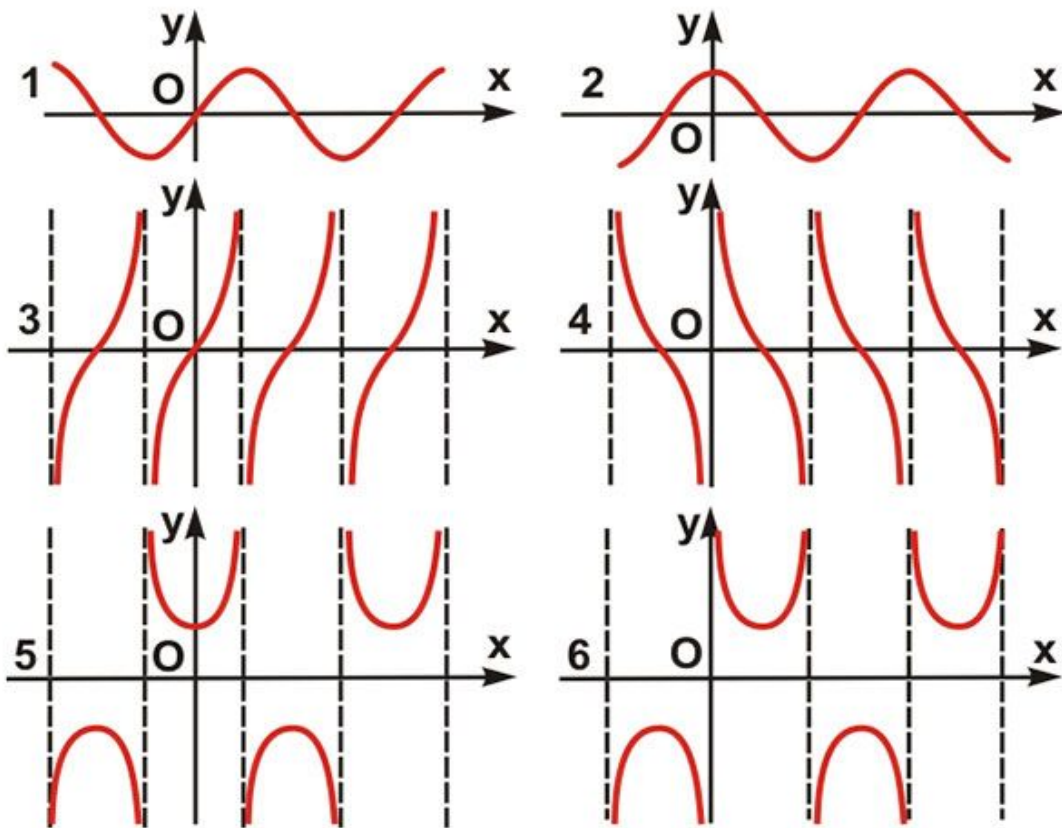


- 
- 
- Аналитическая теория тригонометрических функций в основном была создана выдающимся математиком XVIII века *Леонардом Эйлером* (1707-1783) членом Петербургской Академии наук.
  - Громадное научное наследие Эйлера включает блестящие результаты, относящиеся к математическому анализу, геометрии, теории чисел, механике и другим приложениям математики.
  - Именно Эйлер первым ввел известные определения тригонометрических функций, стал рассматривать функции произвольного угла, получил формулы приведения.



- После Эйлера тригонометрия приобрела форму исчисления: различные факты стали доказываться путем формального применения формул тригонометрии, доказательства стали намного компактнее проще,
- Таким образом, тригонометрия, возникшая как наука о решении треугольников, со временем развилась и в науку о тригонометрических функциях.
- Позднее часть тригонометрии, которая изучает свойства тригонометрических функций и зависимости между ними, начали называть *гониометрией*. Термин гониометрия в последнее время практически не употребляется.

# Графики тригонометрических функций



- 1 — синуса;
- 2 — косинуса;
- 3 — тангенса;
- 4 — котангенса;
- 5 — секанса;
- 6 — косеканса.





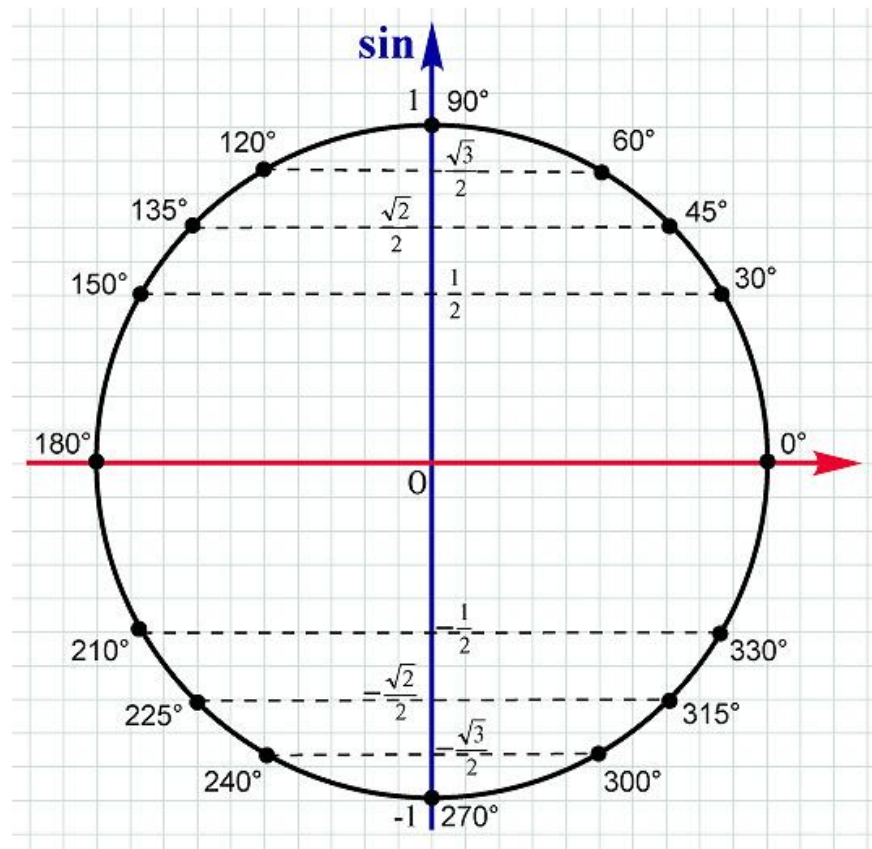
# Синус *sin*

Длительную историю имеет понятие синус. Фактически различные отношения отрезков треугольника и окружности (а по существу, и тригонометрические функции) встречаются уже в III веке до н.э. в работах великих математиков Древней Греции – Евклида, Архимеда, Апполония Пергского. В римский период эти отношения достаточно систематично исследовались Менелаем (I век н.э.), хотя и не приобрели специального названия. Современный синус, например, изучался как полухорда, на которую опирается центральный угол, или как хорда удвоенной дуги.

- В IV-V веках появился уже специальный термин в трудах по астрономии великого индийского учёного Ариабхаты, именем которого назван первый индийский спутник Земли. Отрезок AM он назвал ардхаджива (ардха – половина, джива – тетива лука, которую напоминает хорда). Позднее появилось более краткое название джива. Арабскими математиками в IX веке это слово было заменено на арабское слово джайб (выпуклость). При переводе арабских математических текстов в XVI веке оно было заменено латинским синус (sinus – изгиб, кривизна).

$$y = \sin x,$$

$$D(y) = \mathbb{R}, \quad E(y) = [-1; 1]$$





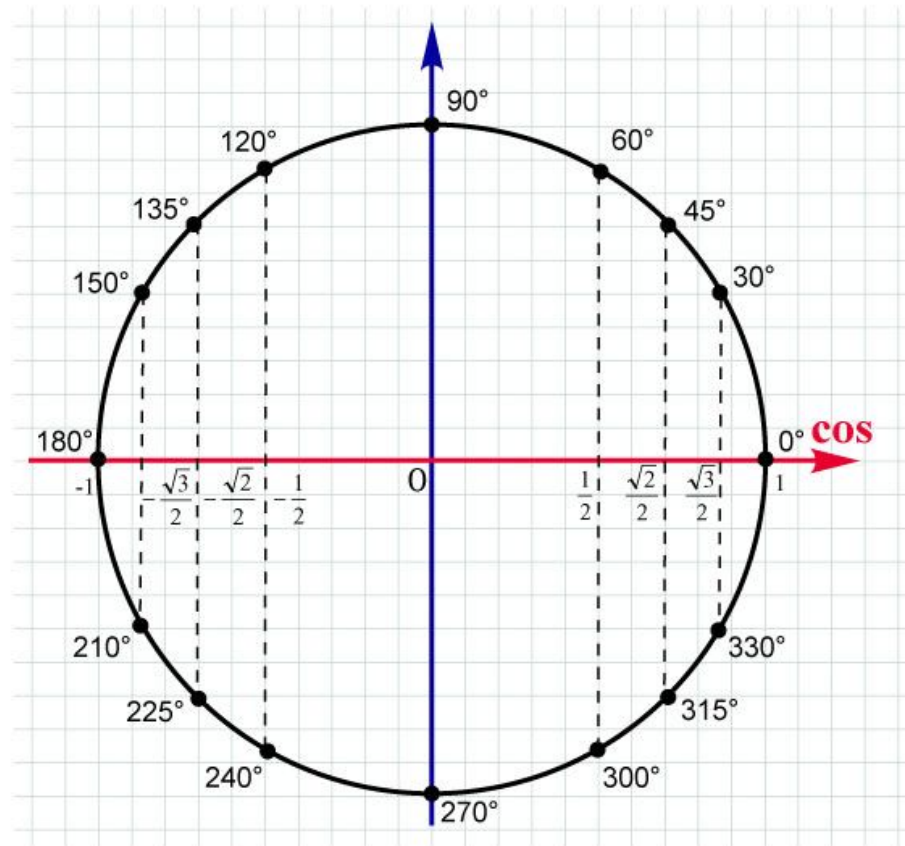
# *Косинус cos*

---

- Слово косинус намного моложе. Косинус – это сокращение латинского выражения *completely sinus*, т. е. “дополнительный синус” (или иначе “синус дополнительной дуги”).

$$y = \cos x,$$

$$D(y) = \mathbb{R}, E(y) = [-1; 1]$$



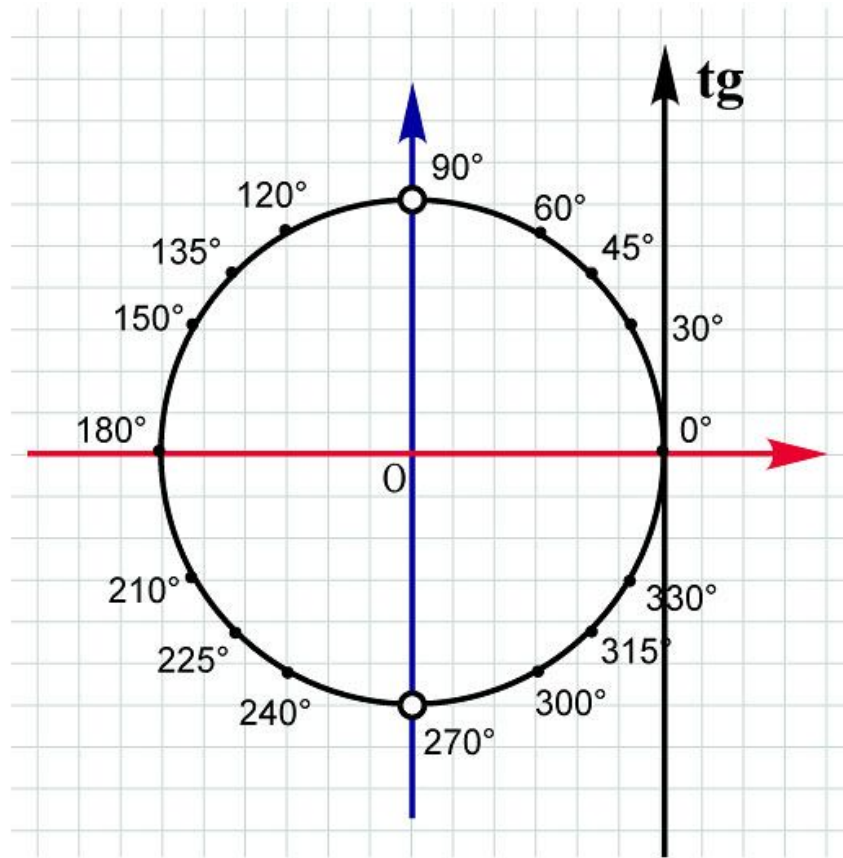


# Тангенс $tg$

- Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс) введен в X веке арабским математиком Абу-ль-Вафой, который составил и первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты лишь в XIV веке немецким математиком, астрономом Региомontanом (1467 г.). Он доказал теорему тангенсов. Региомontan составил также подробные тригонометрические таблицы; благодаря его трудам плоская и сферическая тригонометрия стала самостоятельной дисциплиной и в Европе
- Название «тангенс», происходящее от латинского *tanger* (касаться), появилось в 1583 г. *Tangens* переводится как «касающийся» (линия тангенсов – касательная к единичной окружности).

$$y = \operatorname{tg} x,$$

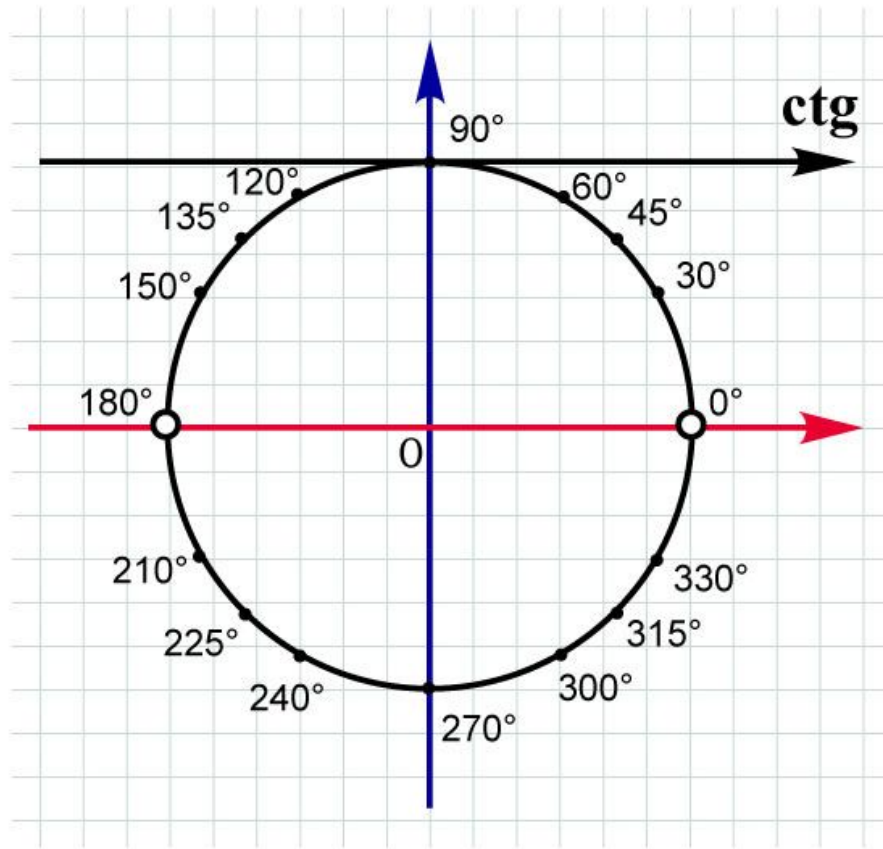
$$D(y) = (-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k), \quad E(y) = \mathbb{R}$$

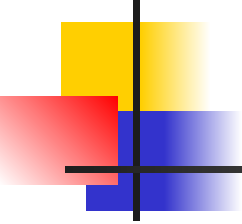




$$y = \operatorname{ctg} x,$$

$$D(y) = (-\pi k; \pi k), \quad E(y) = \mathbb{R}$$





---

Дальнейшее развитие тригонометрия получила в трудах выдающихся астрономов Николая Коперника (1473-1543) – творца гелиоцентрической системы мира, Тихо Браге (1546-1601) и Иогана Кеплера (1571-1630), а также в работах математика Франсуа Виета (1540-1603), который полностью решил задачу об определениях всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным.



# Соотношение между тригонометрическими функциями

---

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$



# Формулы двойного угла

---

$$\sin 2\alpha = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

# Формулы понижения степени

---

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$



# Формулы суммы и разности аргументов

---

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta .$$

$$\operatorname{tg} (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} .$$





# Формулы преобразования произведения в сумму

---

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$$



# Формулы преобразования суммы в произведение

---

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

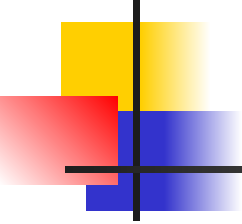
$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\pm \sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

# Формулы приведения и двойного угла

t	90-a	90+a	180-a	180+a	270-a	270+a	360-a
sin t	Cos a	Cos a	Sin a	-Sin a	-Cos a	-Cos a	-Sin a
cos t	Sin a	-Sin a	-Cos a	-Cos a	-Sin a	Sin a	Cos a
tg t	Ctg a	-Ctg a	-Tg a	Tg a	Ctg a	-Ctg a	-Tg a
ctg t	Tg a	-Tg a	-Ctg a	Ctg a	Tg a	-Tg a	-Ctg a



# **Работа** **«История развития** **тригонометрии»**

---

**Выполнена студенткой I курса,  
группы 11БЭ  
Милановой Мадinou в рамках дисциплины  
«Математика»  
под руководством преподавателя  
математики  
Васильевой Елены Дмитриевны**