

Методы решения:

1

2а

2б

3а

3б

1. Использование свойств функций, входящих в уравнения:
 - а) метод обращения к монотонности функции.
 - б) метод использования свойства ограниченности функции.
2. Метод обращения к условию равенства обратных тригонометрических функций:
 - а) одноимённых.
 - б) разноимённых.
3. Метод замены переменной.
 - а) сведение к однородному.
 - б) сведение к алгебраическому с применением различных преобразований.

1) Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций

Решение некоторых уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, основывается исключительно на таких свойствах этих функций, как монотонность и ограниченность. При этом используются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = c$ ($c = \text{const}$) имеет не более одного решения.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения.

ТЕОРЕМА 3. Если $\min_x f(x) = c = \max_x g(x)$ ($c = \text{const}$), то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{array} \right.$$

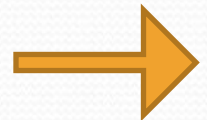
Методы
решения



$$2\arcsin 2x = 3\arccos x.$$

Решение. Функция $y = 2\arcsin 2x$ является монотонно возрастающей, а функция $y = 3\arccos x$ - монотонно убывающей. Число $x = 0,5$ является, очевидно, корнем данного уравнения. В силу теоремы 2 этот корень - единственный.

Ответ: $\{0,5\}$.



$$\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + x} + \operatorname{arcsin} \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\pi}{2}$$

Решение. Пусть $x^2 + x = t$. Тогда уравнение примет вид

$$\operatorname{arctg} \sqrt{t} + \operatorname{arcsin} \sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2}$$

Функции $z = \sqrt{t}$, $z = \sqrt{t+1}$ $y = \operatorname{arctg} z$ и $y = \operatorname{arcsin} z$ являются монотонно возрастающими.

Поэтому функция $y = \operatorname{arctg} \sqrt{t} + \operatorname{arcsin} \sqrt{t+1}$ также

является монотонно возрастающей. В силу теоремы 1 уравнение

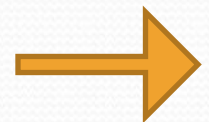
имеет не более одного корня. Очевидно, что $t = 0$ является

корнем этого уравнения. Поэтому \Leftrightarrow

$$x^2 + x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; 0\}$.



$$\arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3} \leq \frac{3}{4}\pi$$

Решение. Левая часть неравенства представляет собой монотонно убывающую на отрезке $[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$

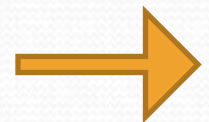
функцию $f(x) = \arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3}$.

Уравнение $f(x) = \frac{3}{4}\pi$ в силу теоремы 1 имеет не более одного корня. Очевидно, что $x = \frac{1}{2}$ корень этого уравнения

Поэтому решением неравенства $f(x) = \frac{3}{4}\pi$ является

отрезок $[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$

Ответ: $[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$



$$\arcsin(x(x+y)) + \arcsin(y(x+y)) = \pi$$

Решение. Поскольку $\arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$ при $|t| \leq 1$ то левая часть уравнения не превосходит $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.
 Знак равенства возможен, лишь если каждое слагаемое левой части равно $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, уравнение равносильно системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \arcsin(x(x+y)) = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin(y(x+y)) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x(x+y) = 1 \\ y(x+y) = 1 \end{array} \right.$$

Решение последней системы не представляет труда.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Методы
решения



2а) уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются одноимёнными обратными тригонометрическими функциями.

Решение уравнений и неравенств, левая и правая части которых представляют собой одноимённые обратные тригонометрические функции различных аргументов, основываются, прежде всего, на таком свойстве этих функций, как монотонность. Напомним, что функции $y = \arcsin t$ и $y = \arctg t$ монотонно возрастают, а функции $y = \arccos t$ и $y = \text{arcctg } t$ монотонно убывают на своих областях определения. Поэтому справедливы следующие равносильные переходы:

$$1. \text{ а) } \arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \arcsin f(x) \leq \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -1 \\ g(x) \leq 1. \end{cases}$$

Методы
решения



$$2. a) \arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leq 1 \end{cases}$$

$$б) \arccos f(x) \leq \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq -1, \\ f(x) \leq 1. \end{cases}$$

$$3. a) \operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$$

$$б) \operatorname{arctg} f(x) \leq \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x).$$

$$4. a) \operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$$

$$б) \operatorname{arcctg} f(x) \leq \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x).$$

Методы
решения



2б) Уравнения и неравенств, левая и правая части которых являются разноимёнными обратными тригонометрическими функциями.

При решении уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются известными тригонометрическими тождествами. При решении многих уравнений такого рода бывает целесообразно не обсуждать вопрос о равносильности преобразований, а сразу переходить к уравнению-следствию и после его решения делать необходимую проверку. Рассуждения здесь могут быть примерно следующими. Пусть требуется решить уравнение

$\arcsin f(x) = \arccos g(x)$. Предположим, что x_0 – решение этого уравнения. Обозначим $\arcsin f(x_0) = \arccos g(x_0)$ через α

Тогда $\sin \alpha = f(x_0)$, $\cos \alpha = g(x_0)$, откуда $f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$

Итак, $\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1$.

Методы
решения



Рассуждая аналогично, можно получить следующие переходы :

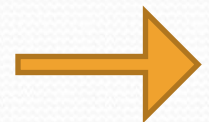
$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f(x) g(x) = 1$$

$$\operatorname{arcsin} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{g^2(x) + 1}$$

$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arccos} g(x) \Rightarrow \frac{1}{f^2(x) + 1} = g^2(x)$$

$$\operatorname{arcsin} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x) + 1}$$

$$\operatorname{arccos} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x) + 1}$$



Решите уравнение

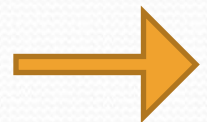
$$\arcsin \frac{\sqrt{3x+2}}{2} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{x+1}}$$

Решение :

$$\arcsin \frac{\sqrt{3x+2}}{2} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{x+1}} \Rightarrow \frac{3x+2}{4} = \frac{1}{1 + \frac{2}{x+1}} \Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}, \\ x = -2. \end{cases} \text{ Корень } x = 2 \text{ является посторонним}$$

Ответ : $\left\{ -\frac{1}{3} \right\}$



Решите уравнение.

$$\operatorname{arctg}(2\sin x) = \operatorname{arcctg}(\cos x)$$

Решение :

$$\operatorname{arctg}(2\sin x) = \operatorname{arctg}(\cos x) \Rightarrow 2\sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Корни вида $x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ являются посторонними.

Ответ : $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$



Решите неравенство :

$$\arcsin \frac{x+2}{5} \leq \arccos \frac{3x+1}{5}$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin \frac{x+2}{5} - \arccos \frac{3x+1}{5}$

и решим неравенство $f(x) \leq 0$ методом интервалов.

1) Найдём $D(f)$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} \left| \frac{x+2}{5} \right| \leq 1 \\ \frac{3x+1}{5} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq 3 \\ -2 \leq x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

2) Найдём нули $f(x)$. Для этого решим уравнение

$$\arcsin \frac{x+2}{5} = \arccos \frac{3x+1}{5} \Rightarrow \left(\frac{x+2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3x+1}{5} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases} \text{ Корень } x = -2 \text{ является посторонним.}$$

Ответ : $x = 1$



Решите уравнение с параметром a .

$$\arctg(x - 2a) = \arctg(2x - a).$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x - 2a)(2x - a) = 1 \\ x - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5ax + 2a^2 - 1 = 0 \\ x > 2a. \end{cases}$$

Графиком квадратного трёхчлена $f(x) = 2x^2 - 5ax + 2a^2 - 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Поскольку $f(2a) = -1 < 0$, то при любом a уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 2 корня, между которыми и заключено число $2a$. Поэтому только больший корень $f(x)$ удовлетворяет условию $x > 2a$.

Это корень $x = \frac{5a + \sqrt{9a^2 + 8}}{4}$.

Ответ : при любом a $x = \frac{5a + \sqrt{9a^2 + 8}}{4}$.

Методы
решения



за) Замена переменной.

Некоторые уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, можно свести к алгебраическим, сделав соответствующую замену переменной. При этом следует помнить о естественных ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Методы
решения



Замена переменной.

Решите уравнение.

$$12 \operatorname{arctg}^2 \frac{x}{2} = \pi \left(3\pi + 5 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right).$$

Решение. Обозначим $\operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ через t ; $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

После преобразований получим уравнение

$$12t^2 - 5\pi t - 3\pi^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4}\pi \\ t = -\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Поскольку $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, то $t = -\frac{\pi}{3}$,

откуда $\operatorname{arctg} \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$.

Ответ : $\{-2\sqrt{3}\}$.



Решите неравенство.

$$\arccos^2 x - 3 \arccos x + 2 \geq 2$$

Решение. Пусть $\arccos x = t$, $0 \leq t \leq \pi$

$$\text{Тогда } t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq 1. \end{cases} \text{ Поскольку } 0 \leq t \leq \pi,$$

$$\text{то } \begin{cases} 2 \leq t \leq \pi \\ 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} 2 \leq \arccos x \leq \pi \\ 0 \leq \arccos x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \cos 2 \\ \cos 1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ : $[-1; \cos 2] \cup [\cos 1; 1]$.



Решите уравнение.

$$\arcsin x \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\arcsin x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) = \frac{\pi^2}{18} \Leftrightarrow 18 \arcsin^2 x - 9\pi \arcsin x + \pi^2 = 0.$$

Пусть $\arcsin x = t$, $|t| \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда $18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ Поэтому } \begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{3} \\ \arcsin x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Методы
решения



3б) Уравнения и неравенства, сводимые к алгебраическим и тригонометрическим уравнениям и неравенствам.

Методы
решения



Решите уравнение :

$$\arccos(3x - 4) = 2\arctg(5 - 3x)$$

Решение. Пусть $\arctg(5 - 3x) = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = 5 - 3x$, $\arccos(3x - 4) = 2\alpha$,

Таким образом,

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = 5 - 3x \\ \cos 2\alpha = 3x - 4. \end{cases}$$

Сложив уравнения этой системы, получим тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg}\alpha + \cos 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 2\sin^2 \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = 1. \end{cases}$$

Поскольку $2\alpha = \arccos(3x - 4)$, а $0 \leq \arccos t \leq \pi$, то $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому последняя

система даёт значения $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$\begin{cases} 3x - 4 = \cos 0 \\ 3x - 4 = \cos \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Оба этих корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ : $\left\{ \frac{4}{3}; \frac{5}{3} \right\}$



Решите неравенство.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin 2x + \arccos(6x - 2) - \frac{5}{6}\pi$

и решим неравенство $f(x) \leq 0$ методом интервалов.

1) Найдём $D(f)$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} -1 \leq 2x \leq 1, \\ -1 \leq 6x - 2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

2) Найдём нули $f(x)$. Для этого решим уравнение

$$\arcsin 2x + \arccos(6x - 2) \leq \frac{5}{6}\pi \quad \text{Пусть } \arcsin 2x = \alpha, \arccos(6x - 2) = \beta$$

Тогда $\sin \alpha = 2x$, $\cos \beta = 6x - 2$, $\alpha + \beta = \frac{5}{6}\pi$. Поэтому $3 \sin \alpha - \cos \beta = 2$,

$$\beta = \frac{5}{6}\pi - \alpha$$



$$\text{Отсюда } 3\sin\alpha - \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow 3\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$5\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\alpha = 4 - 5\sin\alpha \Leftrightarrow 3\cos^2\alpha = 16 - 40\sin\alpha +$$
$$+ 25\sin^2\alpha \Leftrightarrow 3(1 - \sin^2\alpha) = 16 - 40\sin\alpha + 25\sin^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$28\sin^2\alpha - 40\sin\alpha + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{13}{14} \end{cases}$$

Поскольку $x = \frac{1}{2}\sin\alpha$ тт $x = \frac{1}{4}$ или $x = \frac{13}{28}$. Корень $x = \frac{13}{28}$ является
посторонним.

3) Решим неравенство $f(x) \leq 0$ методом интервалов. $\left(f\left(\frac{1}{6}\right) > 0, f\left(\frac{1}{2}\right) < 0\right)$.

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

Методы
решения

