

Диофантовы уравнения



Проблема подтолкнувшая на создание работы:

*Диофантовы уравнения
Глобально не изучаются в
школьной программе, а
присутствуют на экзамене!*

Актуальность моего исследования

обусловлена трудностями
решения уравнений и задач
на составление

«Диофантовых уравнений»

Целью моей работы является:

- -Исследовать варианты решения уравнений с одной неизвестной;
- -Исследовать варианты уравнений с двумя неизвестными;
- -Найти общие закономерности результатов решений поставленных задач.

Немного истории...

О прожитых годах жизни Диофанта Александрийского можно только предполагать, по написанному стихотворению:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей - и камень.

Мудрым искусством его скажет усопшего век.

Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком.

И половину шестой встретил с пушком на щеках.

Только минула седьмая. С подругой он обручился.

С нею, пять лет проведя, сына дождался мудрец;

Только полжизни отцовской, возлюбленный сын его прожил.

Отнят он был у отца ранней могилой своей.

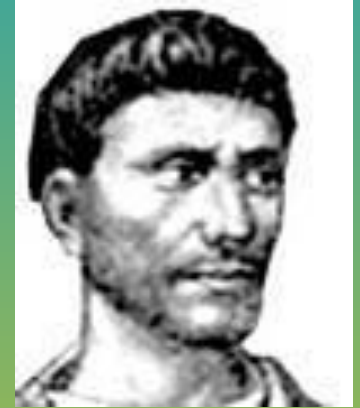
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,

Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Мы узнаем годы жизни Диофанта Александрийского.

*Пусть Диофант прожил x лет. Составим и решим
уравнение:*

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$



Умножим уравнение на 84, чтобы избавиться от дробей:

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x,$$

$$-9x = -756,$$

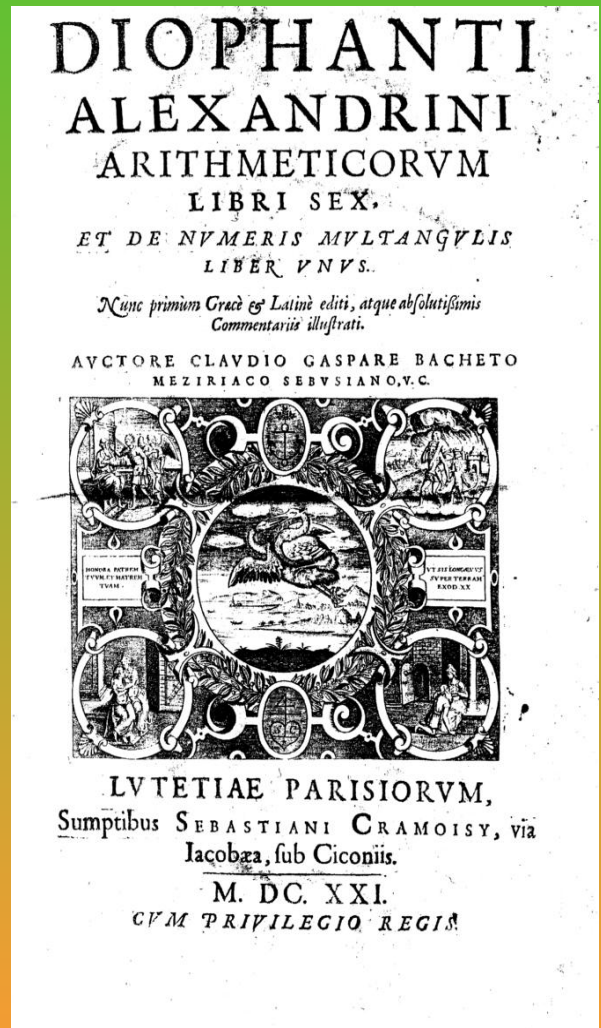
$$x = 84.$$

Арифметика...

Основное произведение Диофанта Александрийского – «Арифметика» в тринадцати книгах. К сожалению, до наших дней сохранились только шесть первых книг из тринадцати.

«Арифметика» Диофанта – это сборник задач их всего 189, каждая из которых снабжена решением или несколькими способами решения и необходимыми пояснениями.

Поэтому, с первого взгляда, кажется, что она не является теоретическим произведением. Однако, при внимательном чтении видно, что задачи тщательно подобраны и служат для иллюстрации вполне определенных, строго продуманных методов.



Диофантовы уравнения с одним неизвестным.

Если уравнение $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами имеет целый корень, то этот корень является делителем числа свободного члена уравнения. Таким образом, при отыскании целых корней уравнения с целыми коэффициентами достаточно испытать лишь делители свободного члена.

Например:

Решить в целых числах уравнение:

$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0$$

Решение. Свободный член уравнения имеет
следующие делители $\pm 1, \pm 3$

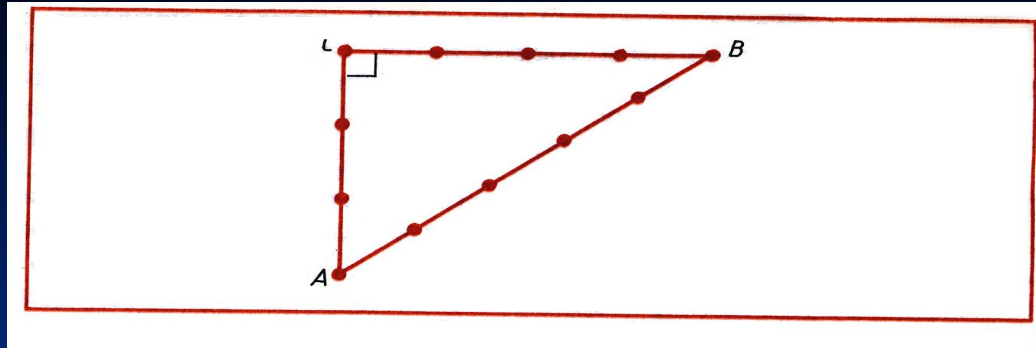
Среди этих чисел и будем искать целые корни
данного уравнения. Подстановкой
убеждаемся, что корнями являются числа 1 и –
3.

Неопределенные уравнения II-ой степени вида

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Существует еще одна частная задача на неопределенные уравнения – теперь уже второй степени, возникшая примерно за две тысячи лет до Диофанта в Древнем Египте.

Если стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4 и 5, то этот треугольник – прямоугольный. Этот факт использовали для построения на местности прямых углов. Поступали довольно просто. На веревке на равном расстоянии друг от друга завязывали узлы



В точке С где надо было построить прямой угол, забивали колышек, веревку натягивали в направлении, нужном строителям, забивали колышек в точке В при $CB = 4$ и натягивали веревку так, чтобы $AC = 3$ и $AB = 5$. Треугольник с такими длинами сторон называют египетским. Мы, конечно, понимаем, что безошибочность такого построения следует из теоремы, обратной теореме Пифагора.

Действительно,

$3^2 + 4^2 = 5^2$. Говоря иначе, числа 3, 4, 5 – корни уравнения

Запишем подряд квадраты натуральных чисел, а под ними разность между последовательными квадратами:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27

Найдем в нижнем ряду квадратные числа. Первое из них $3^2 = 9$, над ним $4^2 = 16$ и $5^2 = 25$, знакомая нам тройка 3, 4, 5. Следующее квадратное число в нижней строке 25, ему соответствует 144 и 169, отсюда находим вторую известную нам тройку 5, 12, 13. Отсюда мы имеем право сформулировать такую теорему:

Каждое нечетное число есть разность двух последовательных квадратов

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} \qquad z = \frac{x^2 + 1}{2}$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Числа, найденные по такому правилу, всегда будут составлять решение интересующего нас неопределенного уравнения. Это уравнение будем называть «уравнением Пифагора», а его решения – «пифагоровыми тройками».

По этому правилу можно получить уже известные нам тройки:

$$x = 3, \quad y = \frac{9-1}{2} = 4, \quad z = \frac{9+1}{2} = 5,$$

$$x = 5, \quad y = \frac{25-1}{2} = 12, \quad z = \frac{25+1}{2} = 13$$

Мои исследования:

Заключались в изучении решений задач и уравнений... И я понял, что для решения задач есть много подходов. Диофант Александрийский не останавливался на одном решении, он находил каждый раз новые и более сложные пути получения результатов.

Куплены фломастеры по 7 рублей и
карандаши по 4 рубля за штуку, всего на
сумму 53 рубля. Сколько куплено
фломастеров и карандашей?

Именно эта задача проявила мой интерес
к изучению «Диофантовых уравнений»
и с неё начались мои исследования!

Решение:

Пусть x – число фломастеров, y – число карандашей, тогда по условию $7x + 4y = 53$. Частное решение этого линейного диофантова уравнения есть: $x=7, y=1$. Тогда общее решение его имеет вид: $x=7-4t, y=1+7t$. Однако условию $x > 0, y > 0$, то значениями параметра t могут быть лишь $t=0$ и $t=1$. При $t=0$ получаем $x=7, y=1$, а при $t=1$ имеем: $x=3, y=8$. Таким образом, решений два, т.е. возможны два варианта покупки фломастеров и карандашей на сумму 53 рубля.

Решить диофантово уравнение:

$$23x - 13y + 7z = 5$$

Выбираем наименьший по модулю коэффициенты x, y, z . В нашем случае это 7, затем остальные коэффициенты 23 и 13, при неизвестных представляем в виде: $23 = 7 \cdot 3 + 2$, $13 = 7 \cdot 2 + (-1)$, тогда преобразуем уравнение следующим образом: $(7 \cdot 3 + 2)x - (7 \cdot 2 - 1)y + 7z = 5$,

Откуда $2x + y + 7(3x - 2y + z) = 5$. Полагая теперь $t = 3x - 2y + z$, получаем уравнение: $2x + y + 7t = 5$.

Далее находим y из последнего равенства, т.е. $y = 5 - 2x - 7t$ и $z = -3x + 2y + t$. Подставляя в последнее равенство выражение для y , находим, что $z = -3x + 2(5 - 2x - 7t) + t = -7x - 13t + 10$.

Таким образом, окончательно получаем: $Y = 5 - 2x - 7t$, $z = 10 - 7x - 13t$, где параметры x , и $t \in \mathbb{Z}$ дают общее решение предположенного диофантова уравнения. Этот метод «наименьшего коэффициента» применим и для решения диофантовых уравнений вида $ax + by = c$.

Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - y^2 = 69$$

Разложим левую часть уравнения на множители и запишем уравнение вида: $(x-y)(x+y)=69$ Т.к. делителями числа 69 являются числа 1, 3, 23 и 69, то 69 можно получить двумя способами: $69=1*69$ и $69=3*23$. Учитывая, что , получим две системы уравнений, решив которые мы сможем найти искомые числа:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 69 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 23 \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x=35, y=34$, а вторая система имеет решение $x=13, y=10$.

Ответ: (35;34) и (13;10)

Заключение:

В заключительной части своей работы мне особенно хотелось подчеркнуть, что изучив специальную литературу, посвященную диофантовым уравнениям, я расширил свои математические навыки и получил дополнительные знания о самом Диофанте, также о влиянии его научных трудов на дальнейшее развитие научной математической мысли. Именно благодаря методам Диофанта были разгаданы методы самого Архимеда. Методы Диофанта растягиваются еще на несколько сотен лет, переплетаясь с развитием теории алгебраических функций и алгебраической геометрии. Развитие идей Диофанта можно проследить вплоть до работ Анри Пуанкаре и Андре Вейля. Именно Диофант открыл нам мир арифметики и алгебры. Поэтому история Диофантова анализа показалась мне особенно интересной.

- Диофантовы уравнения и их решения и по сей день остаются актуальной темой.
- Умение решать такие уравнения позволяет найти остроумные и сравнительно простые решения казалось бы «неразрешимых» задач, а в практической деятельности значительно сэкономить затраты средств и времени.
- Проведя данное исследование, я овладел новыми математическими навыками, рассмотрел некоторые методы решения неопределенных уравнений.
- Изучая диофантовы уравнения, показал практическое их применение, решив несколько задач.

Спасибо за внимание!

До скорых встреч!!!

Работу подготовил:

Калита Виталий Алексеевич