

Муниципальное общеобразовательное учреждение  
средняя школа №30

# КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Выполнила:

ученица 11 «Д» класса

Воронина Наталья

Руководители: Крагель Т.П., Гремяченская Т.В.

2006 г.  
г. Старый Оскол

# Содержание:

1. Функция  $y = ax^2$ , её график и свойства
2. Графики функций  $y = ax^2 + n$  и  $y = a(x - m)^2$
3. Построение графика квадратичной функции

## ФУНКЦИЯ $y = ax^2$ ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

- **Определение.** Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $x$  - независимая переменная,  $a$ ,  $b$  и  $c$  - некоторые числа, причем  $a \neq 0$

Примером квадратичной функции является зависимость пути от времени при равноускоренном движении. Если тело движется с ускорением  $a$  м/с<sup>2</sup> и к началу отсчета времени  $t$  прошло путь  $s_0$  м, имея в этот момент скорость  $v_0$  м/с, то зависимость пройденного пути  $s$  (в метрах) от времени  $t$  (в секундах) выражается формулой:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Если, например,  $a = 6$ ,  $v_0 = 5$ ,  $s_0 = 20$ , то формула примет вид:

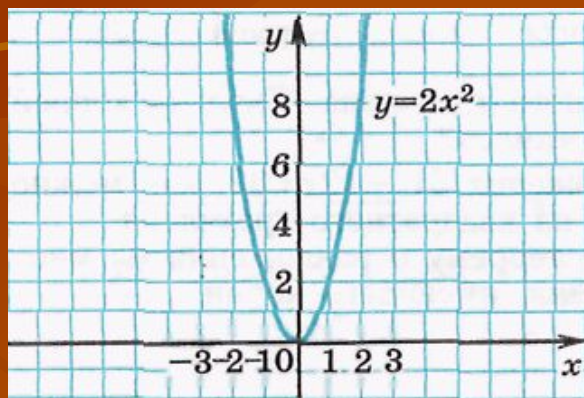
$$s = 3t^2 + 5t + 20.$$

Изучение квадратичной функции мы начнем с частного случая - функции  $y = ax^2$ . При  $a = 1$  формула  $y = ax^2$  принимает вид  $y = x^2$ . С этой функцией мы уже встречались. Графиком этой функции является парабола.

Построим график функции  $y = 2x^2$ . Составим таблицу значений этой функции:

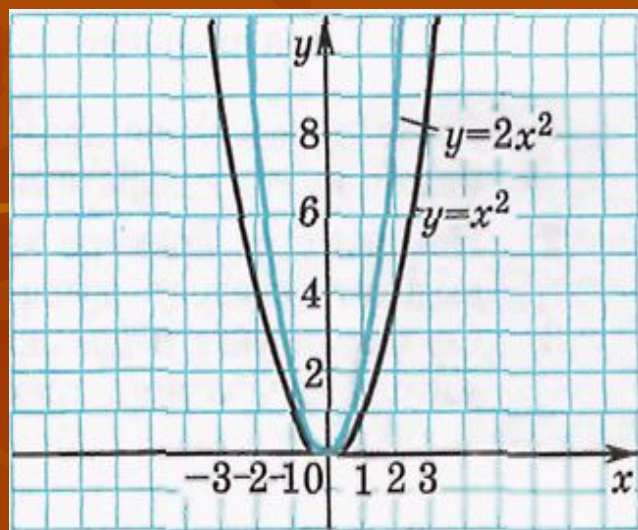
$x$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

Построим точки, координаты которых указаны в таблице. Соединив их плавной линией, получим график функции  $y = 2x^2$ .



При любом  $x \neq 0$  значение функции  $y = 2x^2$  больше соответствующего значения функции  $y = x^2$  в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции  $y = x^2$  вверх так, чтобы расстояние от этой точки до оси  $x$  увеличилось в 2 раза, то она перейдет в точку графика функции  $y = 2x^2$ , при этом каждая точка этого графика может быть получена из некоторой точки графика функции  $y = x^2$

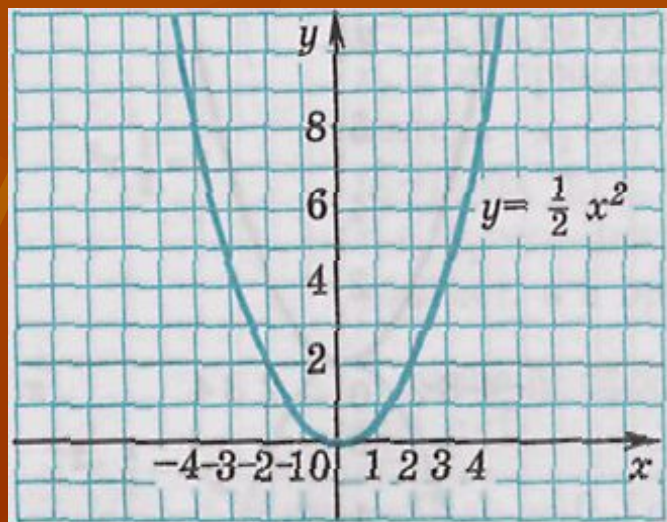
Иными словами, график функции  $y = 2x^2$  можно получить из параболы  $y = x^2$  растяжением от оси  $x$  в 2 раза.



Построим теперь график функции  $y = \frac{1}{2}x^2$ . Для этого составим таблицу ее значений:

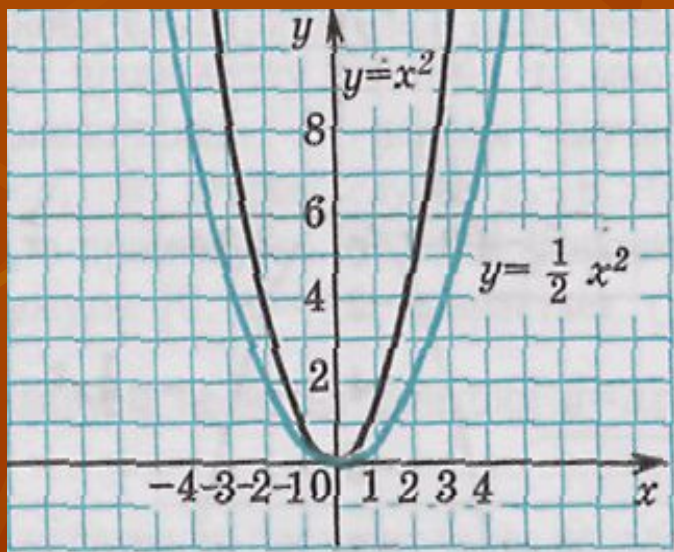
$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции  $y = \frac{1}{2}x^2$ :



При любом  $x \neq 0$  значение функции  $y = \frac{1}{2} x^2$  меньше соответствующего значения функции  $y = x^2$  в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции  $y = x^2$  вниз так, чтобы расстояние от этой точки до оси  $x$  уменьшилось в 2 раза, то она перейдет в точку графика функции  $y = \frac{1}{2} x^2$  причем каждая точка этого графика может быть получена из некоторой точки графика функции  $y = x^2$ .

Таким образом, график функции  $y = \frac{1}{2} x^2$  можно получить из параболы  $y = x^2$  сжатием к оси  $x$  в 2 раза.



Вообще график функции  $y = ax^2$  можно получить из параболы  $y = x^2$  растяжением от оси  $x$  в  $a$  раз, если  $a > 1$ , и сжатием к оси  $x$  в  $\frac{1}{a}$  раз, если  $0 < a < 1$ .

Рассмотрим теперь функцию  $y = ax^2$  при  $a < 0$ .

Построим график функции  $y = -\frac{1}{2}x^2$ , для чего составим таблицу значений этой функции:

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	-8	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	-8

Воспользовавшись этой таблицей, построим график функции  $y = -\frac{1}{2}x^2$ .

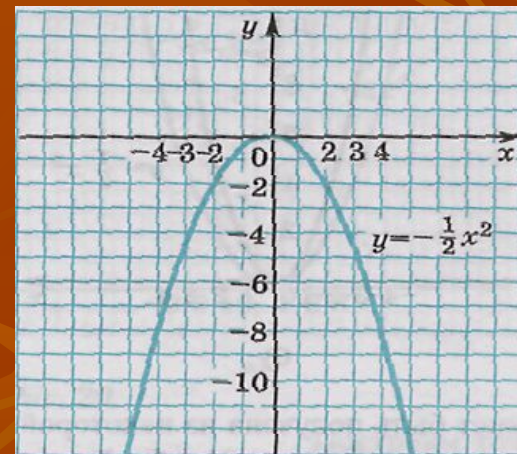
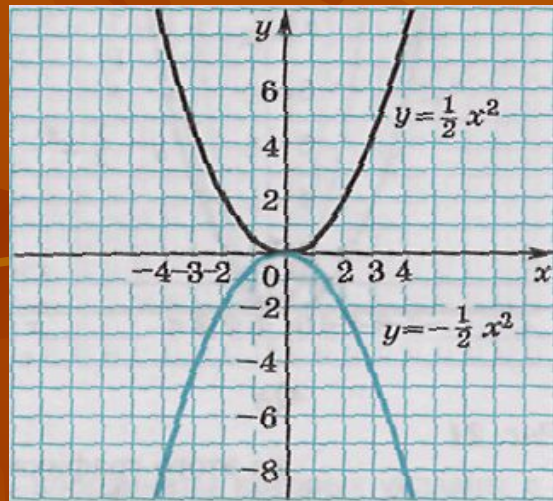




График функции  $y = -\frac{1}{2}x^2$  может быть

получен из графика функции  $y = \frac{1}{2}x^2$

с помощью симметрии относительно оси  $x$ .



**Свойства функции  $y = ax^2$  при  $a > 0$ .**

- 1. Если  $x=0$ , то  $y=0$ . График функции проходит через начало координат.**
- 2. Если  $x \neq 0$ , то  $y > 0$ . График функции расположен в верхней полуплоскости.**
- 3. Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. График функции симметричен относительно оси  $y$ .**
- 4. Функция убывает в промежутке  $(-\infty; 0]$  и возрастает в промежутке  $[0; +\infty)$ .**
- 5. Наименьшее значение, равное нулю, функция принимает при  $x=0$ , наибольшего значения функция не имеет. Областью значений функции является промежуток  $[0; +\infty)$ .**

**Свойства функции  $y = ax^2$  при  $a < 0$ .**

- 1. Если  $x=0$ , то  $y=0$ . График функции проходит через начало координат.**
- 2. Если  $x \neq 0$ , то  $y < 0$ . График функции расположен в нижней полуплоскости.**
- 3. Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции. График функции симметричен относительно оси  $y$ .**
- 4. Функция возрастает в промежутке  $(-\infty; 0]$  и убывает в промежутке  $[0; +\infty)$ .**
- 5. Наибольшее значение, равное нулю, функция принимает при  $x=0$ , наименьшего значения функция не имеет. Областью значений функции является промежуток  $(-\infty; 0]$ .**

## ГРАФИКИ ФУНКЦИИ $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$

График функции  $y=f(x)+n$  можно получить из графика функции  $y=f(x)$  с помощью параллельного переноса вдоль оси  $y$  на  $n$  единиц вверх, если  $n>0$ , или на  $-n$  единиц вниз, если  $n<0$ .

График функции  $y=f(x-m)$  можно получить из графика функции  $y=f(x)$  с помощью параллельного переноса вдоль оси  $x$  на  $m$  единиц вправо, если  $m>0$ , или на  $-m$  единиц влево, если  $m<0$ .

График функции  $y=f(x-m)+n$  можно получить из графика функции  $y=f(x)$  с помощью двух соответствующих параллельных переносов.

**Пример 1.** Выясним, что представляет собой график функции  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ .

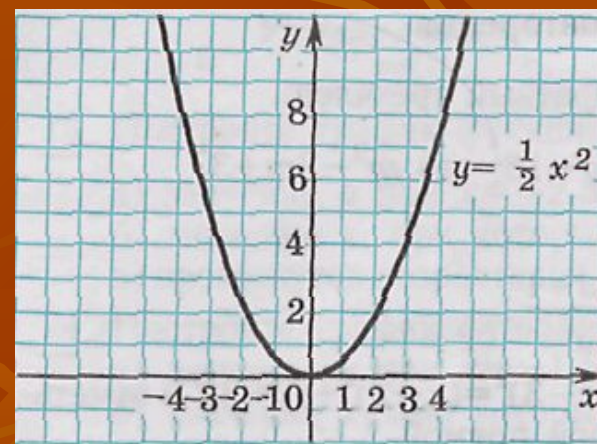
С этой целью в одной системе координат построим графики функций  $y = \frac{1}{2}x^2$  и  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ .

Составим таблицу значений функции  $y = \frac{1}{2}x^2$ :

(1)

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8

График функции  $y = \frac{1}{2}x^2$  изображен на рисунке:



Чтобы получить таблицу значений функции  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$  для тех же значений аргумента, достаточно к найденным значениям функции  $y = \frac{1}{2}x^2$  прибавить 3:

(2)

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	11	7.5	5	3.5	3	3.5	5	7.5	11

Получим график функции

$y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ , который изображен на рисунке:

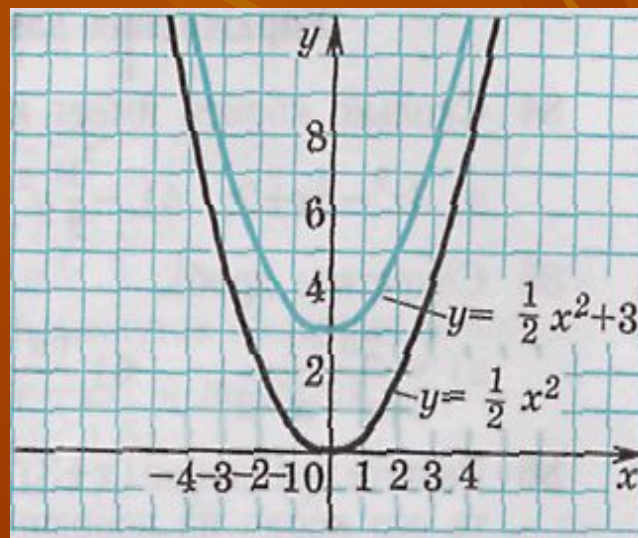


График функции  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$  - парабола, полученная в результате сдвига  
вверх графика функции  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

**Вообще график функции  $y = ax^2 + n$   
является параболой, которую можно  
получить из графика функции  $y = ax^2$   
с помощью параллельного переноса  
вдоль оси  $y$  на  $n$  единиц вверх, если  $n > 0$ ,  
или на  $-n$  единиц вниз, если  $n < 0$ .**

**Пример 2.** Рассмотрим теперь функцию  $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$  и выясним, что представляет собой ее график.

Для этого в одной системе координат построим графики функций  $y = \frac{1}{2}x^2$  и  $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$ .

Для построения графика функции  $y = \frac{1}{2}x^2$  воспользуемся таблицей

(1). Составим теперь таблицу значений функции  $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$ .

При этом в качестве значений аргумента выберем те, которые на 5 больше соответствующих значений аргумента в таблице (1). Тогда соответствующие им значения функции  $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$  будут те же, которые записаны во второй строке таблицы (1):

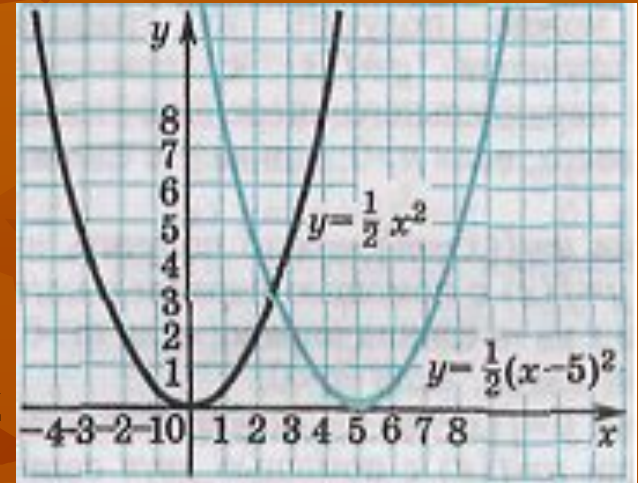
(3)

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8



График функции  $y = \frac{1}{2}x(x - 5)^2$  - парабола, полученная в результате сдвига вправо графика функции  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

Вообще график функции  $y = a(x - t)^2$  является параболой, которую можно получить из графика функции  $y = ax^2$  с помощью параллельного переноса вдоль оси  $x$  на  $t$  единиц вправо, если  $t > 0$ , или на  $-t$  единиц влево, если  $t < 0$ .

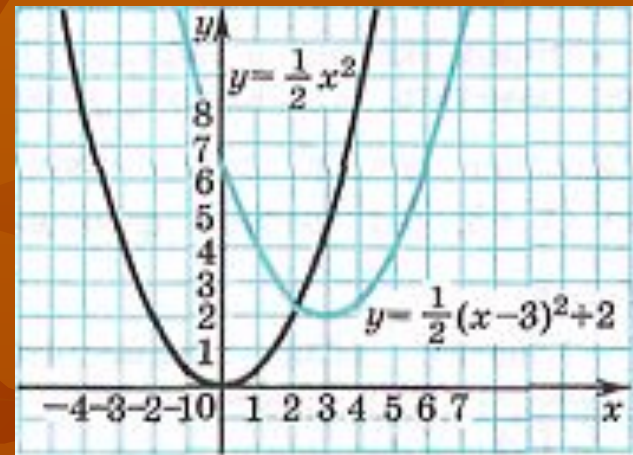


Полученные выводы позволяют понять, что представляет собой график функции  $y = a(x - t)^2 + n$ .

Рассмотрим, например, функцию  $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$ . Ее график можно

получить из графика функции  $y = \frac{1}{2}x^2$  с помощью двух параллельных переносов - сдвига параболы на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх.

Вообще график функции  $y = a(x - m)^2 + n$  является параболой, которую можно получить из графика функции  $y = ax^2$  с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси  $x$  на  $m$  единиц вправо, если  $m > 0$ , или на  $-m$  единиц влево, если  $m < 0$ , и сдвига вдоль оси  $y$  на  $n$  единиц вверх - если  $n > 0$ , или на  $-n$  единиц вниз, если  $n < 0$ .



Заметим, что производить параллельные переносы можно в любом порядке: сначала выполнить параллельный перенос вдоль оси  $x$ , а затем вдоль оси  $y$  или наоборот.

## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим квадратичную функцию  $y = ax^2 + bx + c$ . Выделим из трехчлена  $ax^2 + bx + c$  квадрат двучлена:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 + 2x \times \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Отсюда  $y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ . Мы получили формулу вида  $y = a(x - m)^2 + n$ ,

где  $m = -\frac{b}{2a}$ ,  $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ .

Значит, график функции  $y = ax^2 + bx + c$  есть парабола, которую можно получить из графика функций  $y = ax^2$  с помощью двух параллельных переносов – сдвига вдоль оси  $x$  и сдвига вдоль оси  $y$ .

Отсюда следует, что график функции  $y = ax^2 + bx + c$  есть парабола, вершиной которой является точка  $(m;n)$ , где  $m = -\frac{b}{2a}$ ,  $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ . Осью симметрии параболы служит прямая  $x=m$  параллельная оси  $Oy$ . При  $a > 0$  ветви параболы направлены вверх, при  $a < 0$  - вниз.

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:

- 1) найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости;
- 2) построить еще несколько точек, принадлежащих параболе;
- 3) соединить отмеченные точки плавной линией.

**Пример 1.** Построим график функции  $y = 0,5x^2 + 3x + 0,5$ .  
Графиком функции  $y = 0,5x^2 + 3x + 0,5$  является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты  $m$  и  $n$  вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \times 0,5} = -3; \quad n = 0,5 \times (-3)^2 + 3 \times (-3) + 0,5 = -4.$$

Значит, вершиной параболы является точка  $(-3; -4)$ .

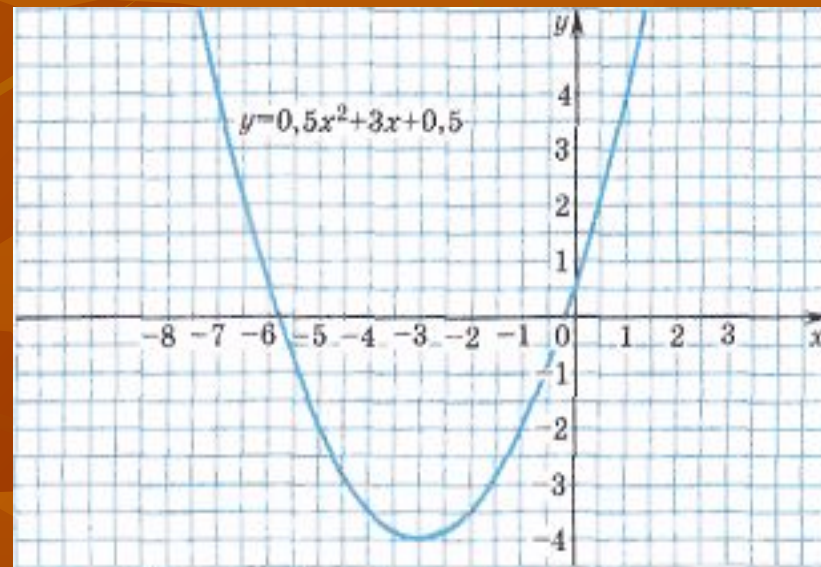
Составим таблицу значений функции:

$x$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$y$	4	0,5	-2	-3,5	-4	-3,5	-2	0,5	4

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции

$$y = 0,5x^2 + 3x + 0,5$$

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая является осью симметрии параболы. Поэтому мы брали точки с абсциссами - 4 и -2, -5 и -1, -6 и 0, симметричные относительно прямой (эти точки имеют одинаковые ординаты).



**Пример 2.** Построим график функции  $y = -2x^2 + 12x - 19$ . Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдем координаты ее вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \times (-2)} = 3;$$

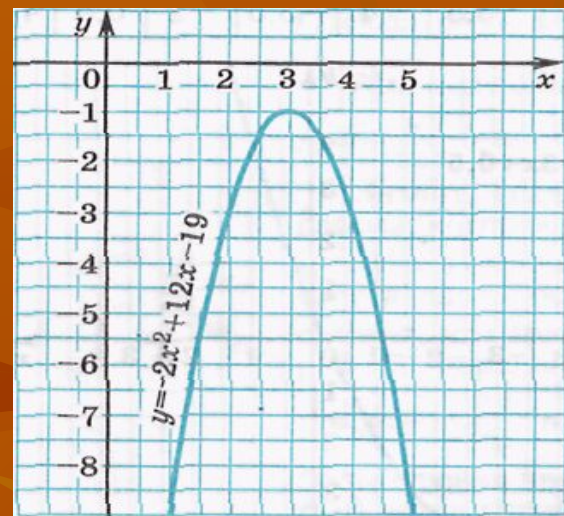
$$n = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Вычислив координаты еще нескольких точек, получим таблицу:

$x$	1	2	3	4	5
$y$	-9	-3	-1	-3	-9

Соединив плавной линией точки, координаты которых указаны в таблице, получим график функции

$$y = -2x^2 + 12x - 19$$



**Пример 3.** Построим график функции  $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ . Графиком функции  $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$  является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты ее вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times \frac{1}{4}} = -2;$$

$$n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 2 + 1 = 0.$$

Вычислив координаты еще нескольких точек, получим таблицу:

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$y$	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$

График функции  $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$   
изображен на рисунке:

