

A stylized, light-colored illustration of a plant with a central stem, several large leaves, and a cluster of small, round buds or flowers at the top, set against a dark brown background.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Урок обобщения и
систематизации знаний

Выполнила
Учитель математики I категории
МБОУ Федосеевской СОШ
Лозовая Раиса Михайловна

1. Показательная функция

2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ

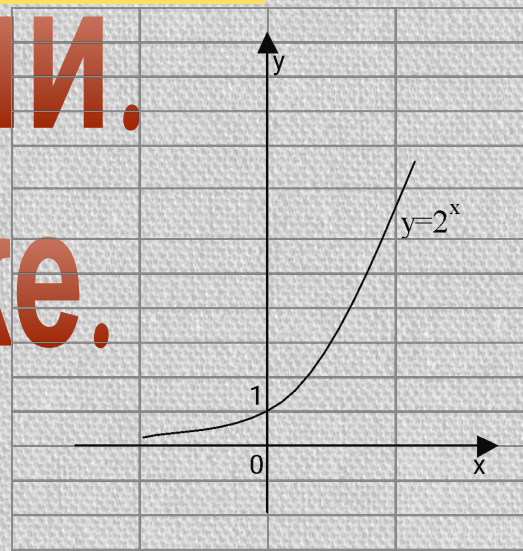
ФУНКЦИЯ

И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В

ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ.

3. В биологии.

4. В экономике.



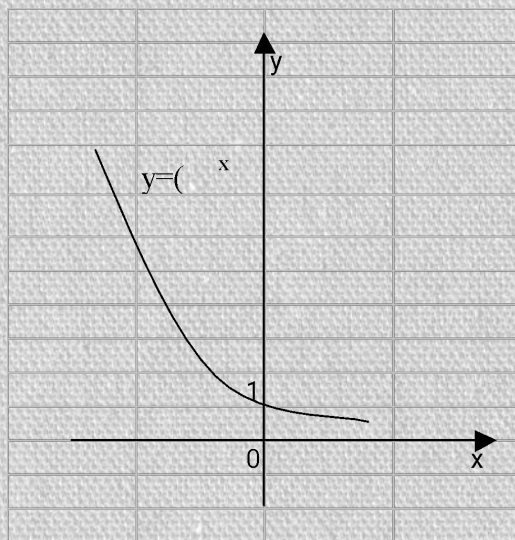
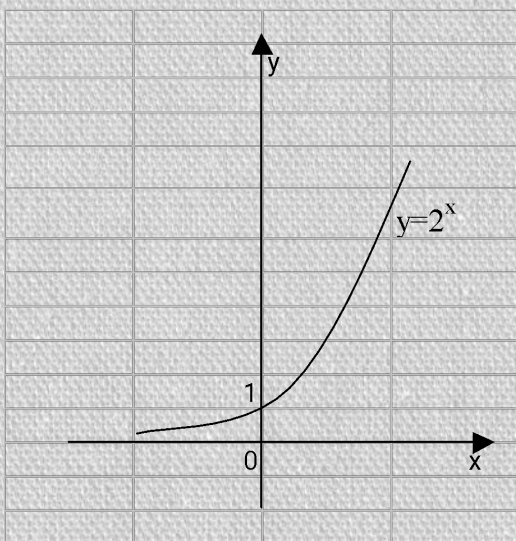
«ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ».

Некоторые наиболее часто
встречающиеся виды
трансцендентных функций,
прежде всего показательные,
открывают доступ ко
многим исследованиям.

Л.Эйлер.



Графики функции $y=2^x$ и $y=(\frac{1}{2})^x$



1. График функции $y=2^x$ проходит через точку $(0;1)$ и расположен выше оси Ox .

$a > 1$ $D(y): x \in \mathbb{R}$

$E(y): y > 0$

Возрастает на всей области определения.

2. График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ также проходит через точку $(0;1)$ и расположен выше оси Ox .

$0 < a < 1$ $D(y): x \in \mathbb{R}$

$E(y): y > 0$

Убывает на всей области определения.

Блиц – опрос

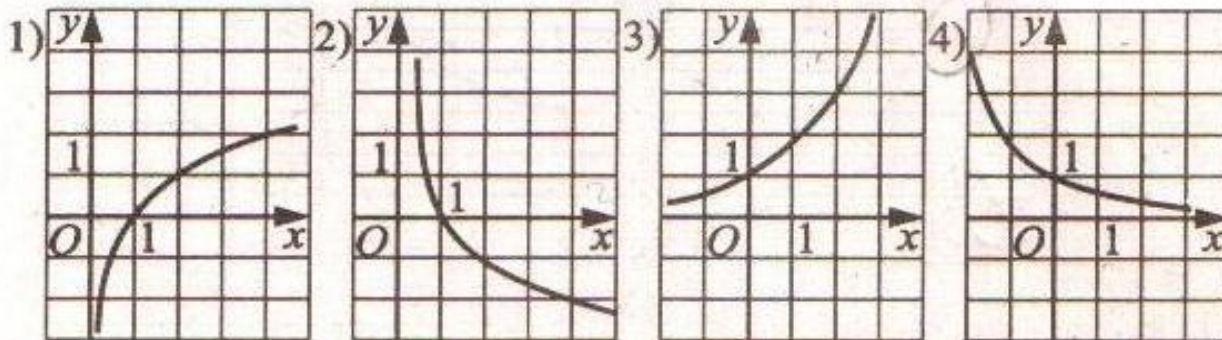
- 1.Какая функция называется показательной?
- 2.Какова область определения функции $y=0,3x$?
- 3.Каково множество значения функции $y=3x$?
4. Дайте определение возрастающей, убывающей функции.
- 5.При каком условии показательная функция является возрастающей?
- 6.При каком условии показательная функция является убывающей?
- 7.Возрастает или убывает показательная функция

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y = 4^x$$

- 8.Определить при каком значении a функция $y = a^x$ проходит через точку $A(1; 2)$;

9

Укажите график функции, заданной формулой $y = 0,5^x$



Какие из перечисленных функций являются возрастающими, а какие убывающими?

1) $y = 5^x$ *возрастающая, т.к. $5 > 1$*

2) $y = 0,5^x$ *убывающая, т.к. $0 < 0,5 < 1$*

3) $y = 10^x$ *возрастающая, т.к. $10 > 1$*

4) $y = \pi^x$ *возрастающая, т.к. $\pi > 1$*

какие из функций являются
возрастающими, а какие
убывающими?

$$5) y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \text{убывающая, т.к. } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$6) y = 49^{-x} \quad \text{убывающая, т.к. } 49^{-1} = \frac{1}{49} \text{ и } 0 < \frac{1}{49} < 1$$

Показательные уравнения.

Уравнения, у которых неизвестное находится в показателе степени, называются показательными.

Способы решения:

1. По свойству степени;
2. Вынесение общего множителя за скобки;
3. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, принимающее значение отличное от нуля при всех действительных значениях x ;
4. Способ группировки;
5. Сведение уравнения к квадратному;
6. Графический.

Например:

$$3^{2x+6} = 2^{x+3}$$

Решение.

$$(3^2)^{x+3} = 2^{x+3}$$

$$9^{x+3} = 2^{x+3}$$

т.к. $2 \neq 0$, тогда $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = 1$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = \left(\frac{9}{2}\right)^0$$

$$x+3 = 0$$

$$x = -3$$

Ответ. $x = -3$.

$$9^{-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{27}$$

Решение.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$(2\sqrt{x-1})^2 = 3^2$$

$$4x - 4 = 9$$

$$4x = 13$$

$$x = 3,25$$

Ответ. $x = 3,25$.

УСТНО):

$$\bullet 5^x = 25$$

$$\underline{\mathbf{x=2}}$$

$$\bullet 7^{x-2} = 49$$

$$\underline{\mathbf{x=4}}$$

$$\bullet 4^x = 1$$

$$\underline{\mathbf{x=0}}$$

$$\bullet 5,7^{x-3} = 1$$

$$\underline{\mathbf{x=3}}$$

$$\bullet 2 \cdot 2^x = 64$$

$$\underline{\mathbf{x=5}}$$

$$\bullet 3 \cdot 9^x = 81$$

$$\underline{\mathbf{x=1,5}}$$

$$\bullet 5^x = 7^x$$

$$\underline{\mathbf{x=0}}$$

$$\bullet 3,4^{x+2} = 4,3^{x+2}$$

$$\underline{\mathbf{x=-2}}$$

Указать способы решения показательных уравнений.

$$1. 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31 \quad 5. 36 \cdot 216^{3x+1} = 1 \quad 9. 3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 36$$

$$2. 27^{1-x} = \frac{1}{81}$$

$$6. 3^{2x+1} - 8 \cdot 3^x = 3$$

$$10. 49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$$

$$3. 9^x - 3^{x+1} = 54$$

$$7. 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 4$$

$$11. 7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$$

$$4. 4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$$

$$8. 4^{2x+2} + 4^{x+1} - 1 = 0$$

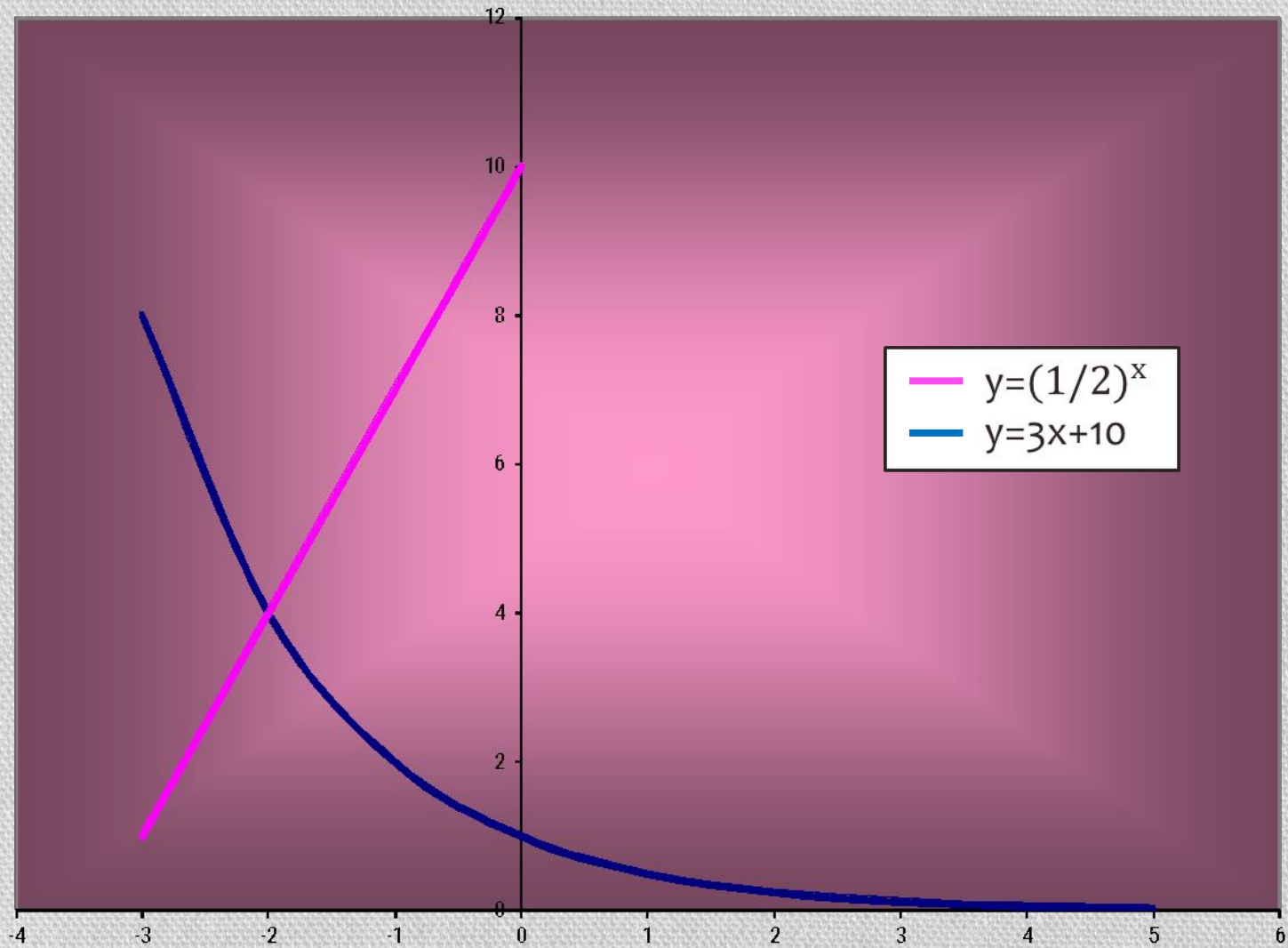
$$12. 9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x}$$

Диагностика уровня формирования практических навыков

Приведение к одному основанию	Вынесение общего множителя за скобки	Замена переменного (приведение к квадратному)
2, 5, 10, 12	1, 7, 9, 11	3, 4, 6, 8

Чтобы решить графически уравнение $f(x) = g(x)$, надо:

- построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$
- найти абсциссу точки пересечения графиков функций
- рассмотреть возможность существования других точек пересечения



Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых

неизвестное содержится в

показателе степени.

Примеры: $3^x \leq 9;$ $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

Показательные неравенства

решаются по следующим свойствам показательной функции:

- если $a > 1$, то неравенство справедливо $\iff a^{x_1} < a^{x_2}$
 $x_1 < x_2$
- если $0 < a < 1$, то неравенство справедливо $\iff a^{x_1} > a^{x_2}$
 $x_1 < x_2$

(устно):

$$\bullet 2^x > 0$$

x -любое

$$\bullet 2^x > 1$$

$x > 0$

$$\bullet \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 1$$

$x \leq 0$

$$\bullet \left(\frac{1}{2}\right)^x < 0$$

$x = \emptyset$

$$\bullet 5^x > 25$$

$x > 2$

$$0,7^x < 0,49$$

$x > 2$

$$\bullet 0,2^{x+1} < 0,2^4$$

$x > 3$

$$\bullet 9,7^{x-2} < 9,7^{10}$$

$x < 12$

Решения показательных неравенств:

1. Способ Уравнивание оснований правой
и левой части

Решите неравенство:

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4$$

т.к. $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ возрастающая

$$\underline{x > 4}$$

$$x \in (4; +\infty)$$

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывающая

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

Решение показательных неравенств

Способ 2: Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10$$

$$3^{x-3} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 3^3\right) > 10$$

$$3^{x-3} (1 + 9) > 10$$

$$3^{x-3} \cdot 10 > 10 \quad | : 10$$

$$3^{x-3} > 1$$

$$3^{x-3} > 3^0$$

$$3 > 1, \text{ то } x - 3 > 0$$

$$x > 3.$$

Ответ: $x > 3$

Решение показательных неравенств

Способ 3: введение новой переменной

$$9^x - 10 \cdot 3^x < -9$$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

$$t^2 - 10t + 9 < 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$(t-9)(t-1) < 0$$



$$1 < t < 9$$

$$1 < 3^x < 9$$

$$3^x < 3^2; \quad 3^x > 3^0;$$
$$x < 2 \quad x > 0.$$

$3 > 1$, то

Ответ: $x < 2$. $x > 0$



ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

*И её применение в
природе и технике.*



Подумайте! Где может использоваться показательная функция?



- Тема «Показательная функция» является основополагающей при изучении таких тем, как «Производная показательной функции», «Термодинамика», «Электромагнетизм», «Ядерная физика», «Колебания», используется для решения некоторых задач судовождения.

Наглядный бытовой пример!

- Все, наверное, замечали, что если снять кипящий чайник с огня, то сначала он быстро остывает, а потом остывание идет гораздо медленнее. Дело в том, что скорость остывания пропорциональна разности между температурой чайника и температурой окружающей среды. Чем меньше становится эта разность, тем медленнее остывает чайник. Если сначала температура чайника равнялась T_0 , а температура воздуха T_1 , то через t секунд температура T чайника выразится формулой:
- $T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1$,
- где k - число, зависящее от формы чайника, материала, из которого он сделан, и количества воды, которое в нем находится.

При падении тел в безвоздушном пространстве скорость их непрерывно возрастает.

- При падении тел в воздухе скорость падения тоже увеличивается, но не может превзойти определенной величины.

- Рассмотрим задачу о падении парашютиста. Если считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости падения парашютиста, т.е. что $F = kv$, то через t секунд скорость падения будет равна: $v = mg/k(1 - e^{-kt/m})$, где m - масса парашютиста. Через некоторый промежуток времени $e^{-kt/m}$ станет очень маленьким числом, и падение станет почти равномерным. Коэффициент пропорциональности k зависит от размеров парашюта. Данная формула пригодна не только для изучения падения парашютиста, но и для изучения падения капли дождевой воды, пушинки и т.д.

- Много трудных математических задач приходится решать в теории межпланетных путешествий. Одной из них является задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость v . Эта масса M зависит от массы m самой ракеты (без топлива) и от скорости v_0 , с которой продукты горения вытекают из ракетного двигателя.

- Если не учитывать сопротивление воздуха и притяжение Земли, то масса топлива определится формулой:
 $M = m(ev/v_0 - 1)$ (формула К.Э. Циолковского). Например, для того чтобы ракете с массой 1,5 т придать скорость 8000 м/с, надо при скорости истечения газов 2000 м/с взять примерно 80 т топлива.

- Если при колебаниях маятника, гири, качающейся на пружине, не пренебрегать сопротивлением воздуха, то амплитуда колебаний становится все меньше, колебания затухают. Отклонения точки, совершающей затухающие колебания, выражается формулой: $s = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \varphi)$. Так как множитель e^{-kt} уменьшается с течением времени, то размах колебаний становится все меньше и меньше.

- Когда радиоактивное вещество распадется, его количество уменьшается. Через некоторое время остается половина первоначального количества вещества. Этот промежуток времени t_0 называется периодом полураспада. Вообще через t лет масса m вещества будет равна: $m = m_0(1/2)^{t/t_0}$, где m_0 - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество.
- Явление радиоактивного распада используется для определения возраста археологических находок, например, определен примерный возраст Земли, около 5,5 млрд. лет, для поддержания эталона времени.

Задача:

Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8г ?

Решение.

$$T = 140 \text{ сут.}$$

$$t = 10 \text{ лет}$$

$$m_0 = 8 \text{ г}$$

$$m = ?$$

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$t = 365 \cdot 10 = 3650 \text{ (дней)}$$

$$m(t) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3650}{140}} = 1,1345 \cdot 10^{-7} \text{ (г)} = 1,13 \cdot 10^{-7} \text{ (г)}.$$

Ответ: $1,13 \cdot 10^{-7}$ (г).



- **Как видите, во всех приведенных выше исследованиях использовалась показательная функция.**

• Вот некоторые из Нобелевских лауреатов, получивших премию за исследования в области физики с использованием показательной функции:

• Пьер Кюри - 1903 г.

• Ричардсон Оуэн - 1928 г.

• Игорь Тамм - 1958 г.

• Альварес Луис - 1968 г.

• Альфвен Ханнес - 1970 г.

• Вильсон Роберт Вудро - 1978 г.

Она не перестаёт нас удивлять!

- Показательная функция также используется при решении некоторых задач судовождения, например, функцию e^{-x} используют в задачах, требующих применения биномиального закона (повторение опытов), закона Пуассона (редких событий), закона Релея (длина случайного вектора).



*Применение
показательной
функции
в биологии .*



Применение логарифмической функции в биологии.

В питательной среде бактерия кишечной палочки делится каждую минуту. Понятно, что общее число бактерий за каждую минуту удваивается. Если в начале процесса была одна бактерия, то через x минут их число (N) станет равной 2^x , т.е.

$$N(x) = 2^x.$$



ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИКЕ



Задача: Ежемесячно на банковский вклад, равный S_0 рублей начисляется $r\%$. На сколько процентов возрастет банковский вклад за x месяцев?

Решение.

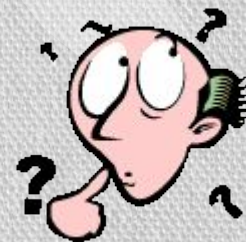
Пусть $r = 2\%$, $x = 12$ месяцев.

Тогда за год банковский вклад возрастет на

$$S_0(x) - S_0 = S_0(1 + 0,02)^{12} - S_0 = S_0(1,02^{12} - 1) = S_0(1,268241 - 1) \approx S_0 \cdot 0,27,$$

$$\frac{0,27S_0}{S_0} \cdot 100\% = 27\%.$$

Ответ: на 27%.



А теперь, в конце урока хочется, чтобы вы выразили свое отношение к нашей сегодняшней работе и всему уроку в целом. Ответьте на вопросы в листах рефлексии и сдайте их мне.

- 1) Понравилось на уроке? (отметь галочкой мордашку)



- 2) Поставь оценку учителю за работу по 10 бальной системе.

- 3) Поставь оценку себе за работу по 10 бальной системе.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- *Страница 57 учебника – «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»*

**СПАСИБО ЗА
УРОК!**

