

ОБЪЕМ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

Объем — величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом.
2. Равные фигуры имеют равные объемы.
3. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2 , то объем фигуры Φ равен сумме объемов фигур Φ_1 и Φ_2 , т.е.

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

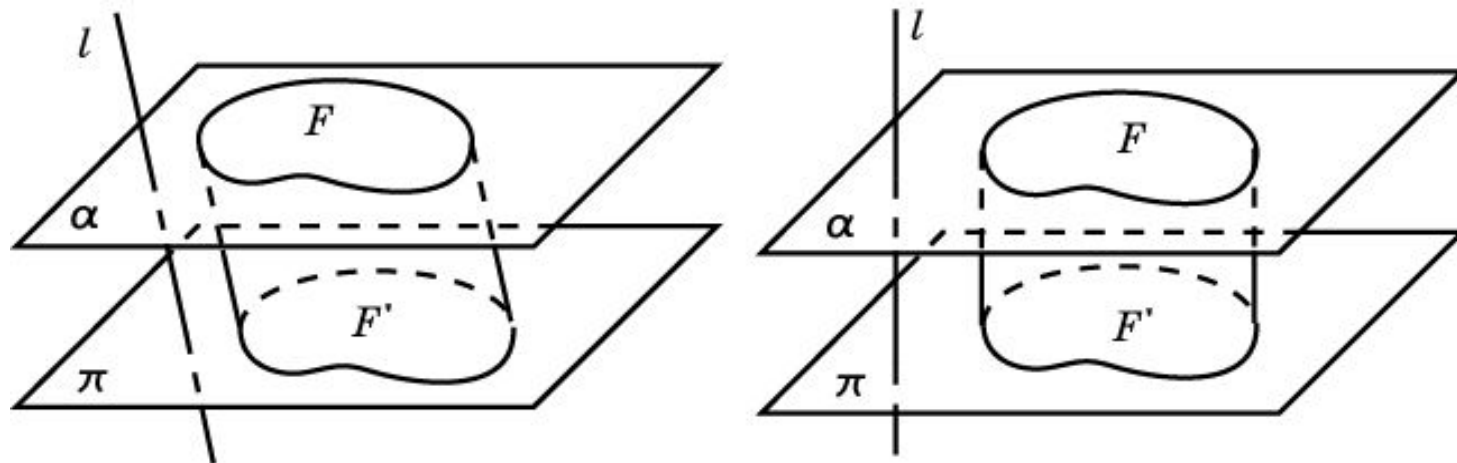
Две фигуры, имеющие равные объемы, называются **равновеликими**.

Обобщенный цилиндр

Пусть α и π - две параллельные плоскости, l - пересекающая эти плоскости прямая; F – фигура на одной из этих плоскостей, F' – ее параллельная проекция на другую плоскость в направлении прямой l . Отрезки, соединяющие точки фигуры F с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **обобщенным цилиндром**. Фигуры F и F' называются **основаниями** обобщенного цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называют **высотой** обобщенного цилиндра.

В случае, если в определении обобщенного цилиндра вместо параллельной проекции берется ортогональная, т. е. прямая l перпендикулярна плоскостям α и π , то обобщенный цилиндр называется **прямым**. В противном случае цилиндр называется **наклонным**.

Частным случаем обобщенного цилиндра являются цилиндр и призма.



Объем обобщенного цилиндра

Теорема. Объем прямого обобщенного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Следствие 1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е. имеет место формула

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

где a , b , c – ребра параллелепипеда.

Следствие 2. Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь основания, h – высота призмы.

Следствие 3. Объем прямого кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R , вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

Упражнение 1

Может ли объем фигуры в пространстве быть: а) отрицательным числом; б) нулем?

Ответ: а) Нет; б) да.

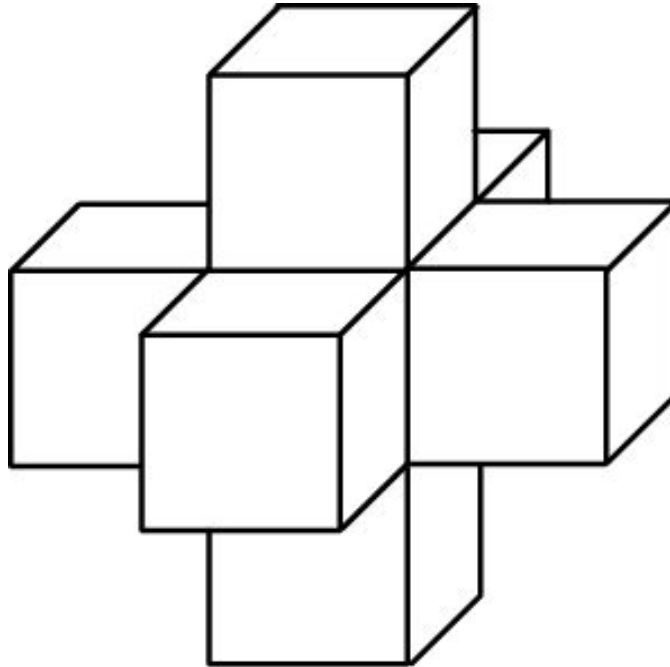
Упражнение 2

Диагональ куба равна 2 см. Найдите его объем.

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{9} \text{ см}^3.$

Упражнение 3

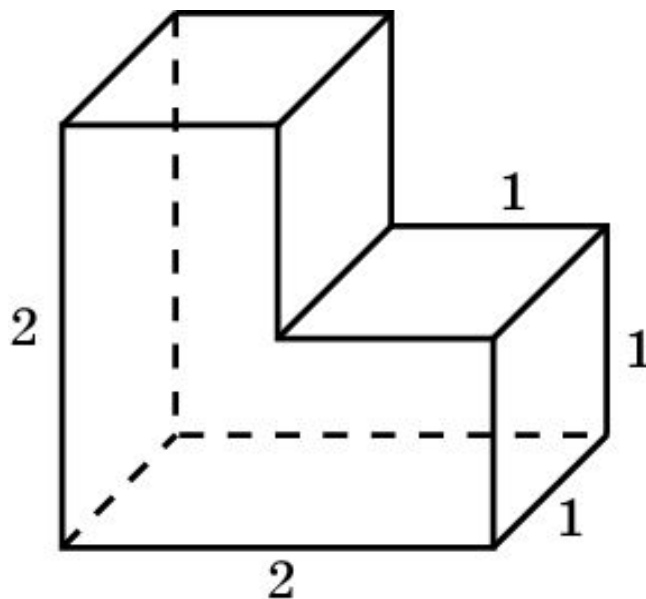
Чему равен объем пространственного креста, если ребра образующих его кубов равны единице?



Ответ: Семь куб. ед.

Упражнение 4

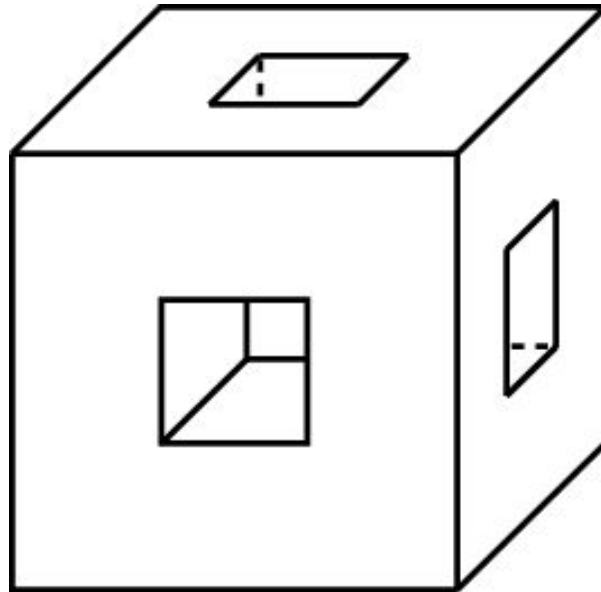
Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке?



Ответ: Три куб. ед.

Упражнение 5

Дан куб с ребром 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см. Найдите объем оставшейся части.



Ответ: 20 см^3 .

Упражнение 6

Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) $1 : 2$; б) $1 : 3$; в) $1 : n$?

Ответ: а) $1 : 8$; б) $1 : 27$; в) $1 : n^3$.

Упражнение 7

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3 . Определите ребро куба.

Ответ: 3 см.

Упражнение 8

В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 5 см и образуют угол в 60° . Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 30° . Определите объем этого параллелепипеда.

Ответ: 140 см^3 .

Упражнение 9

Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3, n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

Ответ: а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в n раз;
б) увеличится в 4 раза, в 9 раза, в n^2 раз;
в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в n^3 раз.

Упражнение 10

Осевое сечение прямого кругового цилиндра - квадрат со стороной 1 см. Найдите объем цилиндра.

Ответ: $\frac{\pi}{4} \text{ см}^3$.

Упражнение 11

Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире.
Какая кружка вместительнее?

Ответ: Та, которая шире.

Упражнение 12

Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом φ . Найдите объем цилиндра.

Ответ: $V = \frac{\pi \cdot d^3}{4} \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi.$

Упражнение 13

Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a .

Ответ: $\pi \cdot a^3$.

Упражнение 14

Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон a и b . Как относятся объемы цилиндров?

Ответ: $a : b$.

Упражнение 15

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объем данной призмы.

Ответ: 60 см^3 .

Упражнение 16

Найдите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой 5 см и высота 8 см.

Ответ: 200 см^3 .

Упражнение 17

Найдите высоту правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания 20 см и объем 4800 см^3 .

Ответ: 12 см.

Упражнение 18

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Ответ: $1 : 3$.

Упражнение 19

Основание прямой призмы - ромб, площадь которого равна 1 м^2 . Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2 . Найдите объем призмы.

Ответ: 3 м^3 .

Упражнение 20

Найдите формулу объема правильной n -угольной призмы, высота которой равна h , а сторона основания равна a .

Ответ: $V = \frac{n \cdot a^2 h}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$

Упражнение 21

Объем правильной шестиугольной призмы равен V . Определите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.

Ответ: $\frac{3V}{4}$.

Упражнение 22

Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?

Ответ: В 2 раза.

Упражнение 23

В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?

Ответ: 243π см³.

Упражнение 24

Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен R . Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью.

Ответ: $\pi R^3 \operatorname{tg} \varphi$.

Упражнение 25

Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, в основании которой квадрат со стороной 1, а высота равна 0,5.

Ответ: $\frac{1}{6}$.