

# Геометрические места точек

**Геометрическим местом точек (ГМТ)** называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

Примерами геометрических мест точек являются:

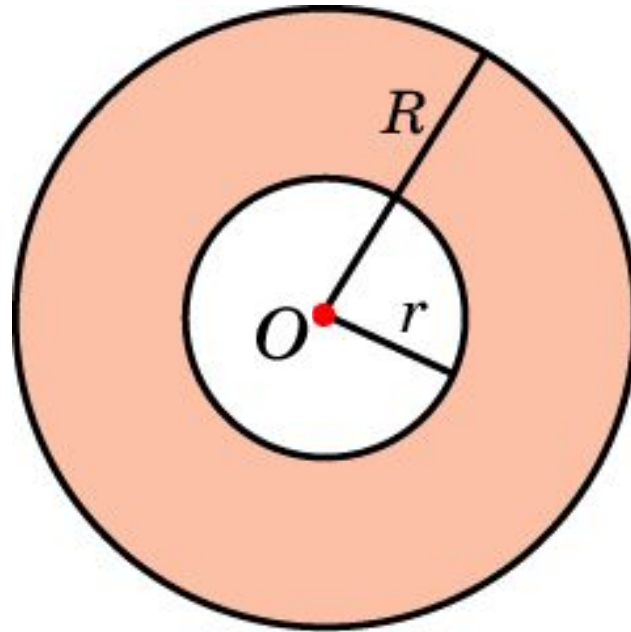
**окружность** – ГМТ, удаленных от данной точки на данное расстояние;

**круг** – ГМТ, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное.

## Упражнение 1

Пусть  $O$  – точка плоскости. Изобразите ГМТ  $X$ , для которых выполняются неравенства

$$r \leq OX \leq R.$$

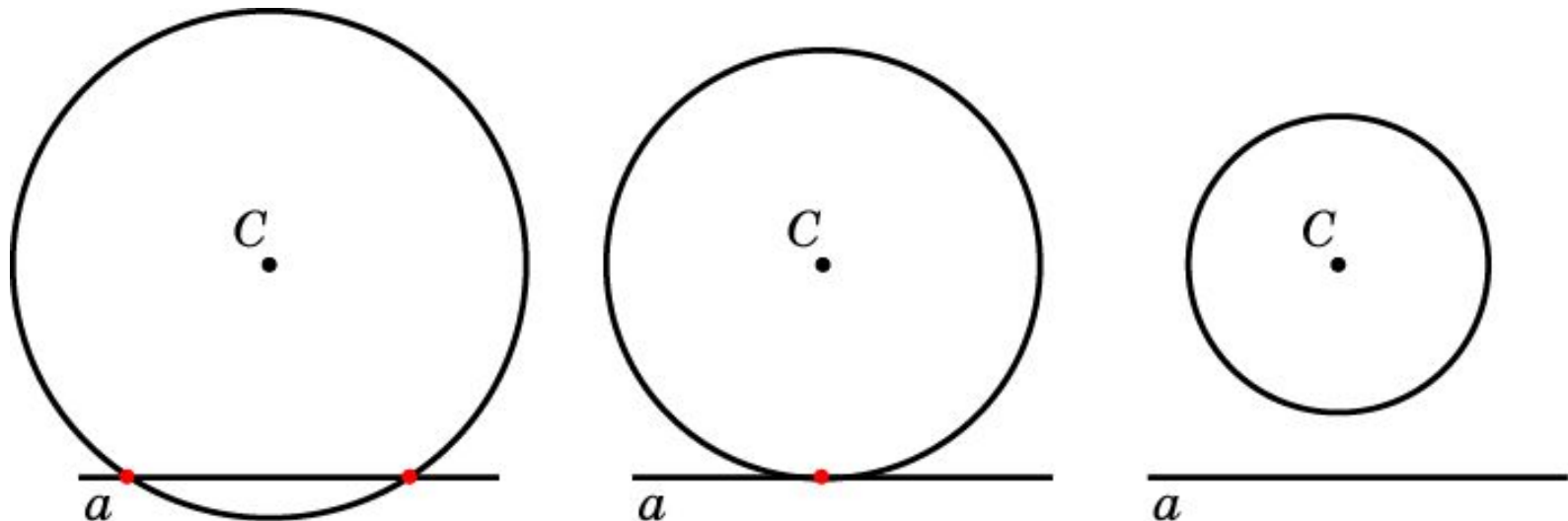


Ответ: Кольцо

## Упражнение 2

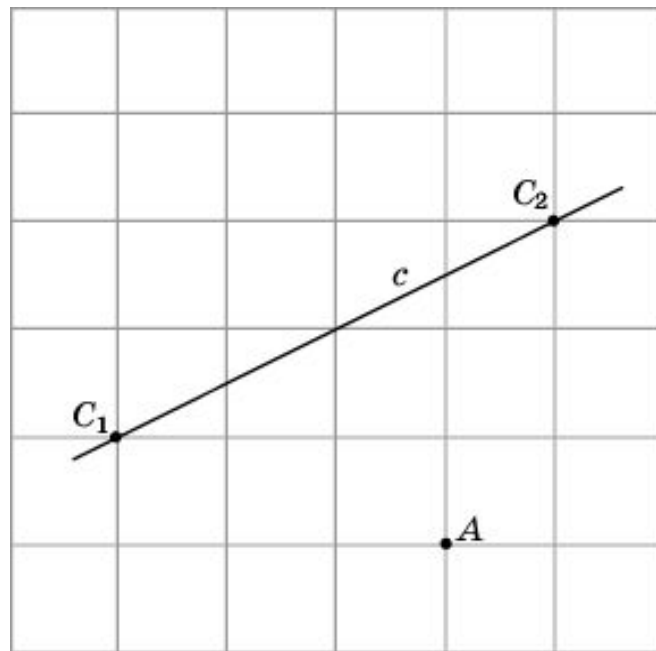
На данной прямой  $a$  найдите точки, удаленные от данной точки  $C$  на заданное расстояние  $R$ . Какие при этом возможны случаи?

**Ответ:** Точки пересечения прямой  $a$  и окружности с центром в точке  $C$  и радиусом  $R$ . Получаются две, одна или ни одной точки в зависимости от того, расстояние от точки  $C$  до прямой  $a$  больше  $R$ , равно  $R$  или меньше  $R$  соответственно.



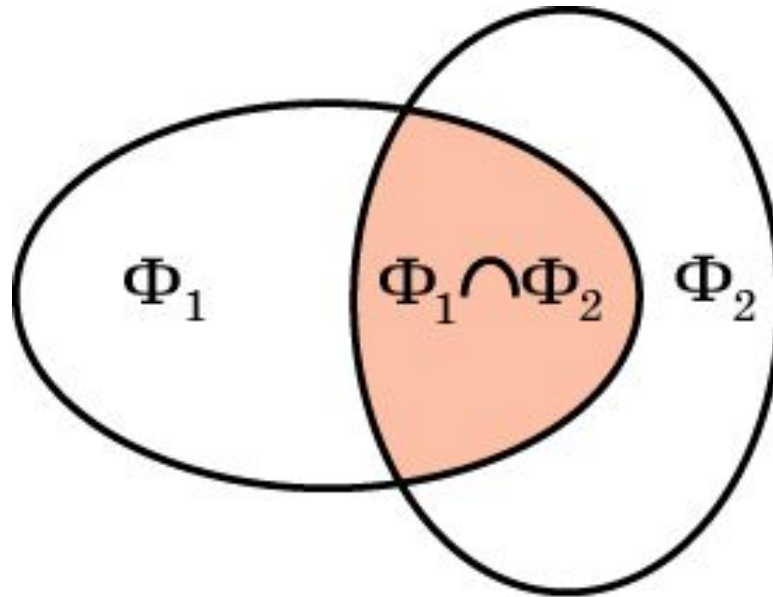
## Упражнение 3

На прямой  $c$  отметьте точки, удаленные от точки  $A$  на расстояние, равное  $\sqrt{2}$  (стороны квадратных клеток равны 1).



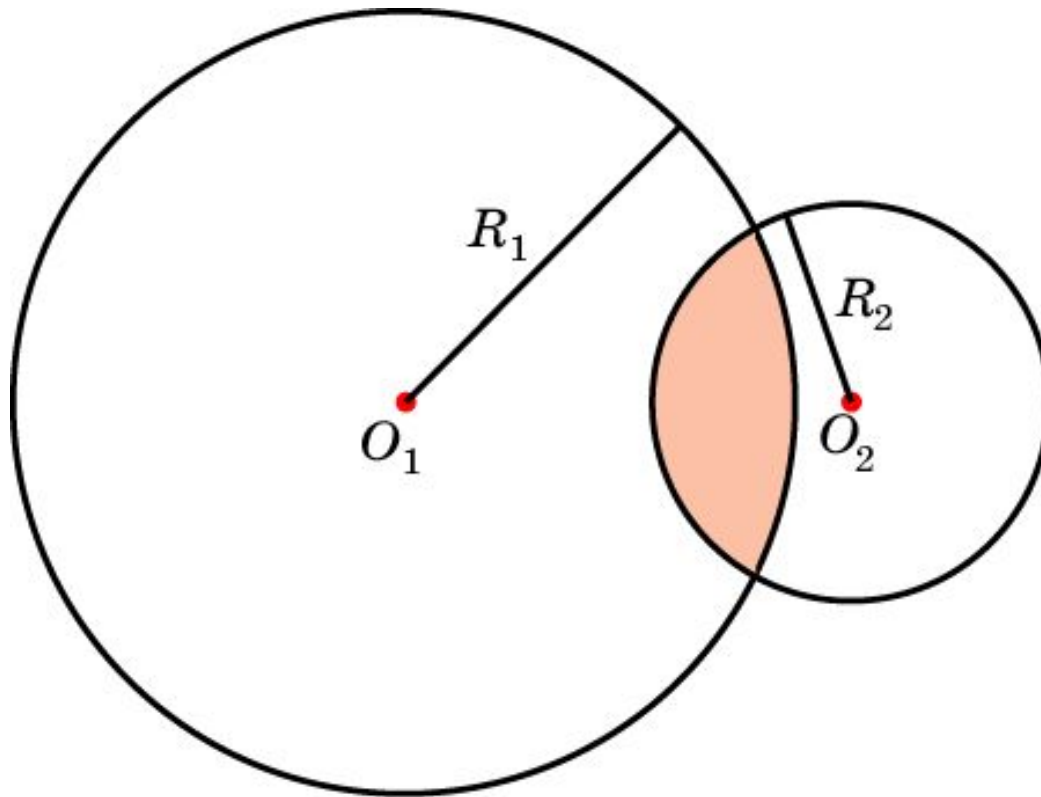
## Пересечение фигур

Пусть  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – фигуры на плоскости. Фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре  $\Phi_1$  и фигуре  $\Phi_2$ , называется пересечением фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  и обозначается  $\Phi_1 \cap \Phi_2$ .



## Упражнение 4

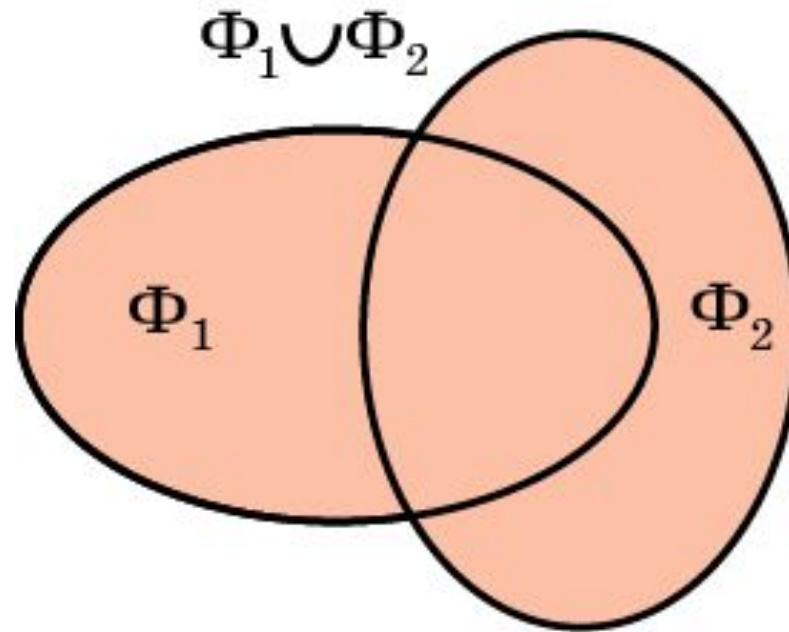
Даны две точки  $O_1$  и  $O_2$ . Найдите ГМТ  $X$ , для которых  $XO_1 \leq R_1$  и  $XO_2 \leq R_2$ . Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



**Ответ:** Искомое ГМТ является пересечением двух кругов с центрами в точках  $O_1$ ,  $O_2$  и радиусами  $R_1$ ,  $R_2$ .

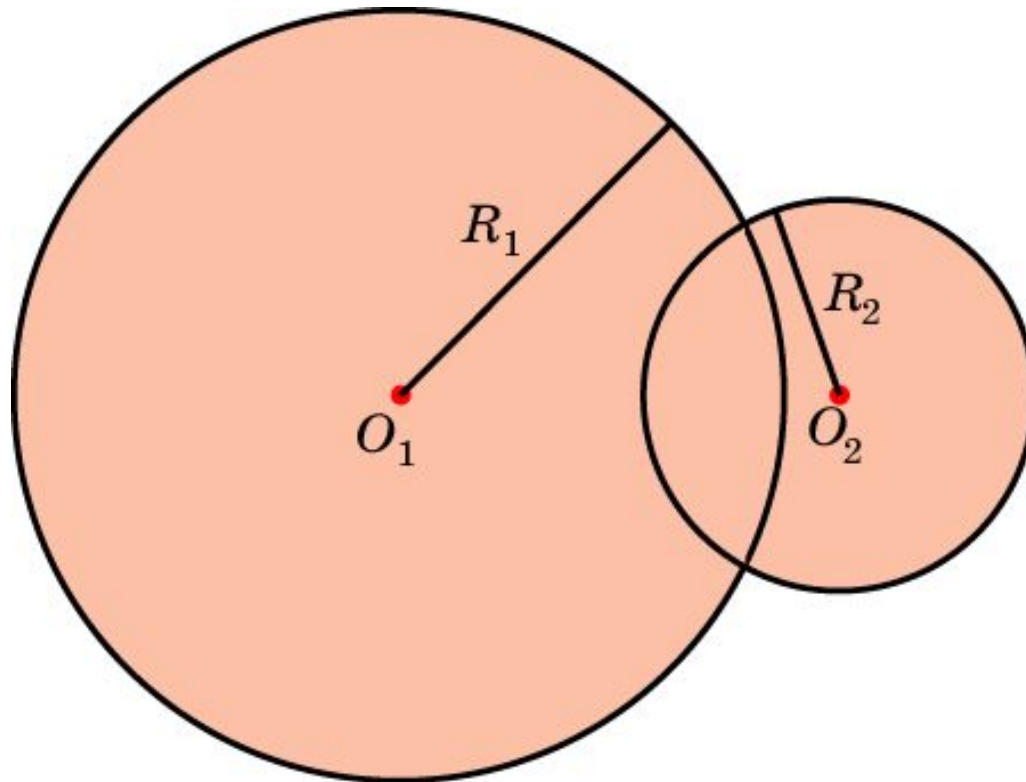
## Объединение фигур

Пусть  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – фигуры на плоскости. Фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре  $\Phi_1$  или фигуре  $\Phi_2$ , называется объединением фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  и обозначается  $\Phi_1 \cup \Phi_2$ .



## Упражнение 5

Даны две точки  $O_1$  и  $O_2$ . Найдите ГМТ  $X$ , для которых  $XO_1 \leq R_1$  или  $XO_2 \leq R_2$ . Объединением каких фигур является искомое ГМТ.

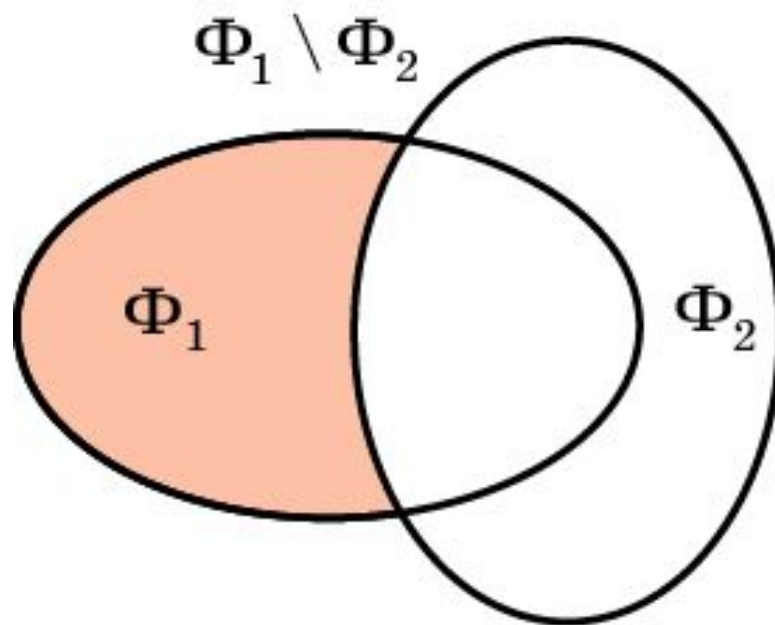


**Ответ:** Искомое ГМТ является объединением двух кругов с центрами в точках  $O_1$ ,  $O_2$  и радиусами  $R_1$ ,  $R_2$ .



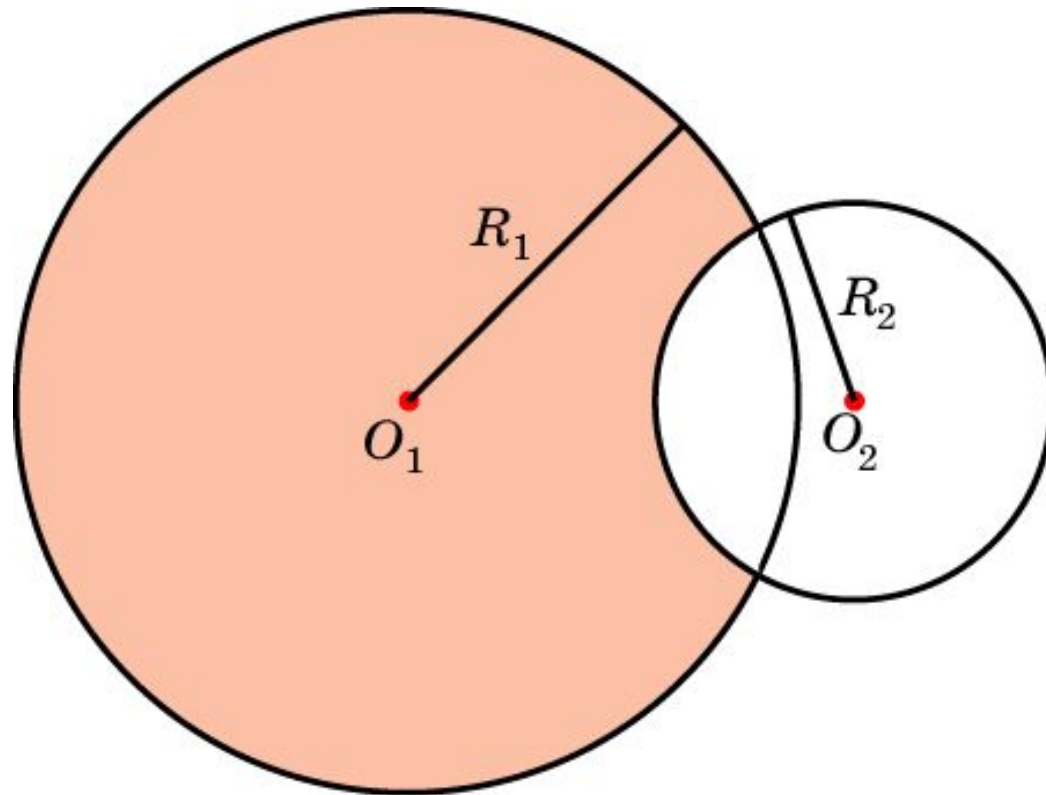
## Разность фигур

Пусть  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – фигуры на плоскости. Фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре  $\Phi_1$  и не принадлежащих фигуре  $\Phi_2$ , называется разностью фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  и обозначается  $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ .



## Упражнение 6

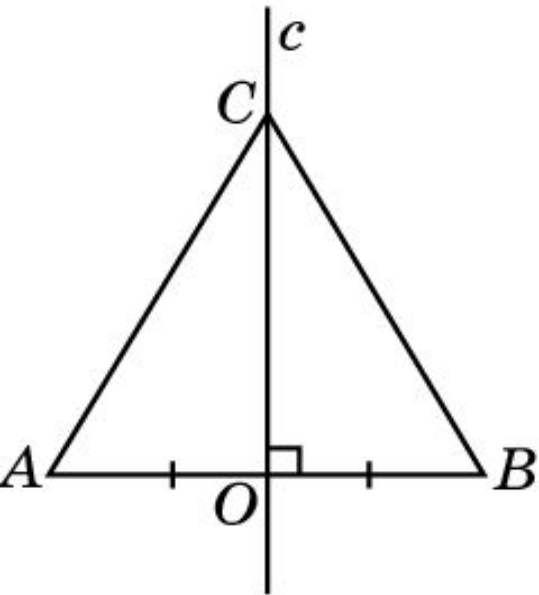
Даны две точки  $O_1$  и  $O_2$ . Найдите ГМТ  $X$ , для которых  $XO_1 \leq R_1$  и  $XO_2 \geq R_2$ . Разностью каких фигур является искомое ГМТ.



**Ответ:** Искомое ГМТ является разностью двух кругов с центрами в точках  $O_1$ ,  $O_2$  и радиусами  $R_1$ ,  $R_2$ .

# Серединный перпендикуляр

**Серединным перпендикуляром** к заданному отрезку называется ...  
прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его  
середину.



**Теорема.** Серединный перпендикуляр к отрезку является ГМТ, одинаково удаленных от концов этого отрезка.

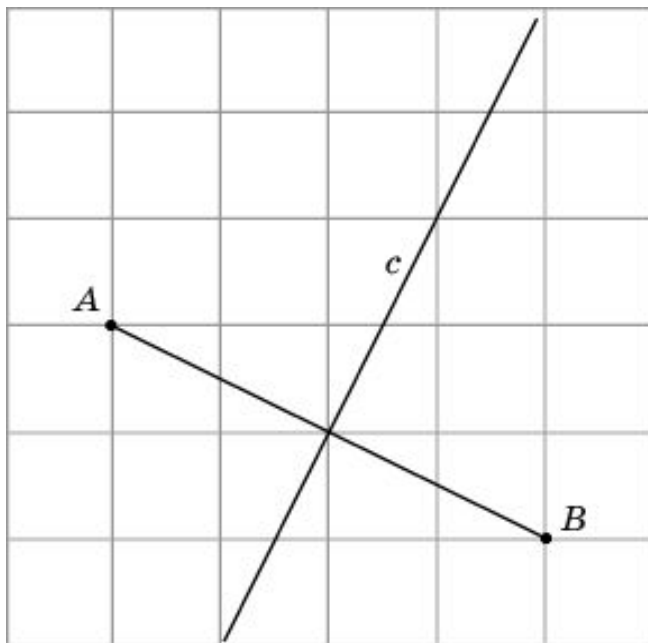
**Доказательство.** Пусть дан отрезок  $AB$  и точка  $O$  – его середина. Очевидно, точка  $O$  одинаково удалена от точек  $A, B$  и принадлежит серединному перпендикуляру. Пусть точка  $C$  одинаково удалена от точек  $A$  и  $B$  и не совпадает с точкой  $O$ .

Тогда треугольник  $ABC$  равнобедренный и  $CO$  – медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана является также и высотой. Значит, точка  $C$  принадлежит серединному перпендикуляру.

Обратно, пусть точка  $C$  принадлежит серединному перпендикуляру и не совпадает с  $O$ , тогда прямоугольные треугольники  $AOC$  и  $BOC$  равны (по катетам). Следовательно,  $AC=BC$ .

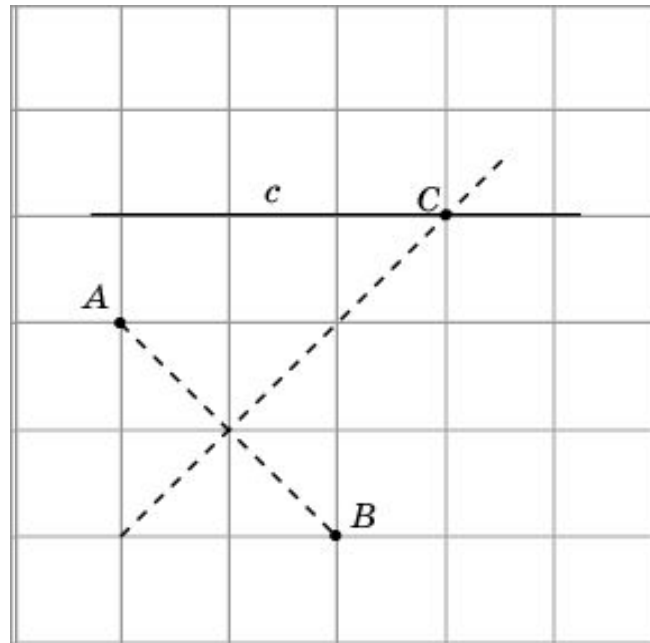
## Упражнение 7

Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от точек  $A$  и  $B$ .



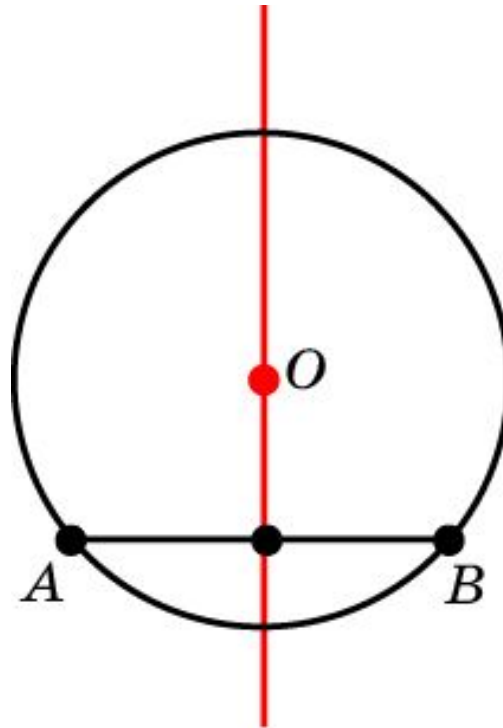
# Упражнение 8

На прямой  $c$  отметьте точку  $C$  равноудаленную от точек  $A$  и  $B$ .



## Упражнение 9

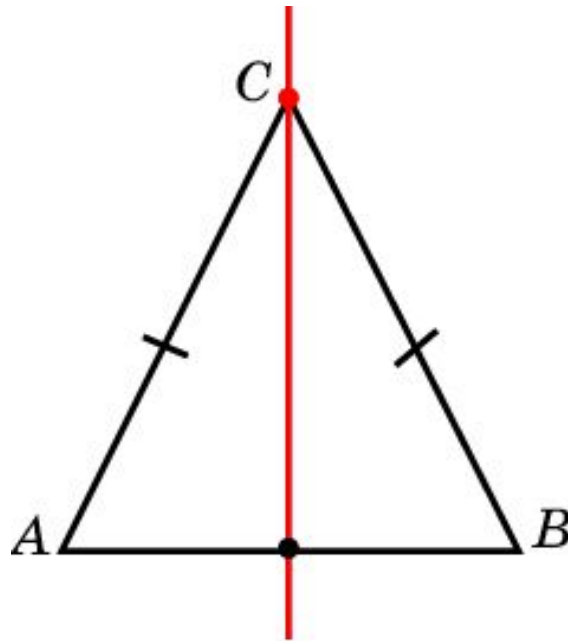
Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.



**Ответ:** Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему две данные точки.

## Упражнение 10

Найдите геометрическое место вершин  $C$  равнобедренных треугольников с заданным основанием  $AB$ .

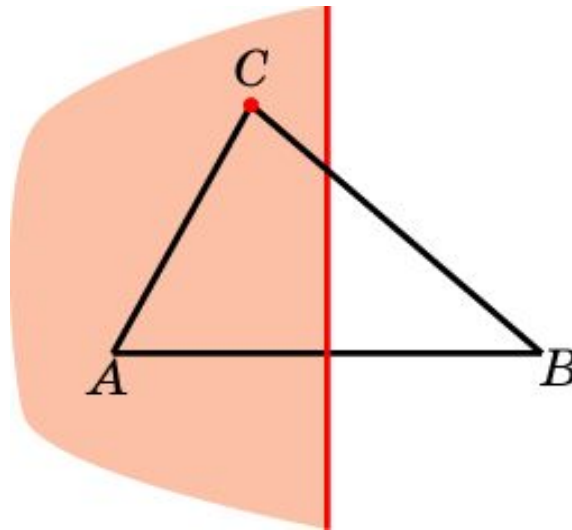


**Ответ:** Серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  без середины этого отрезка.

## Упражнение 11

Пусть  $A$  и  $B$  - точки плоскости. Найдите геометрическое место точек  $C$ , для которых  $AC \leq BC$ .

**Ответ:** Полуплоскость, определяемая серединным перпендикуляром к отрезку  $AB$ , содержащая точку  $A$ ;

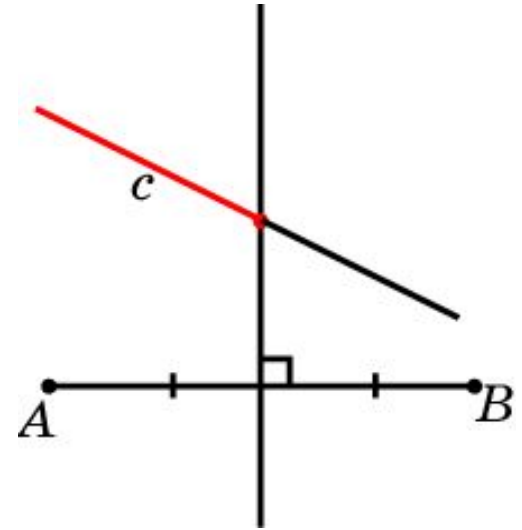




## Упражнение 12

Пусть  $A$  и  $B$  точки плоскости,  $c$  - прямая. Найдите геометрическое место точек прямой  $c$ , расположенных ближе к  $A$ , чем к  $B$ . В каком случае таких точек нет?

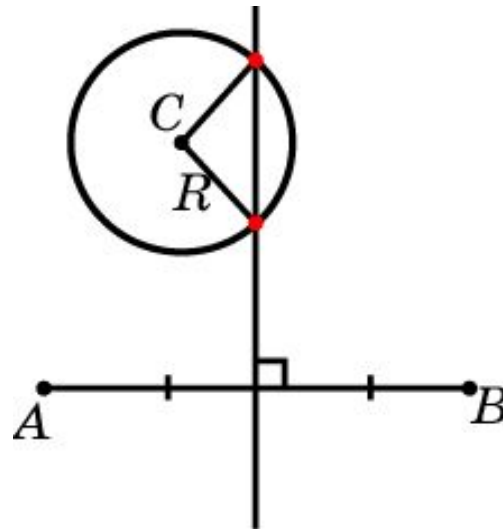
**Ответ:** Часть прямой  $c$ , лежащая внутри полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром к отрезку  $AB$  и точкой  $A$ . Если прямая  $c$  целиком лежит в полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром и точкой  $B$ , то таких точек нет.



## Упражнение 13

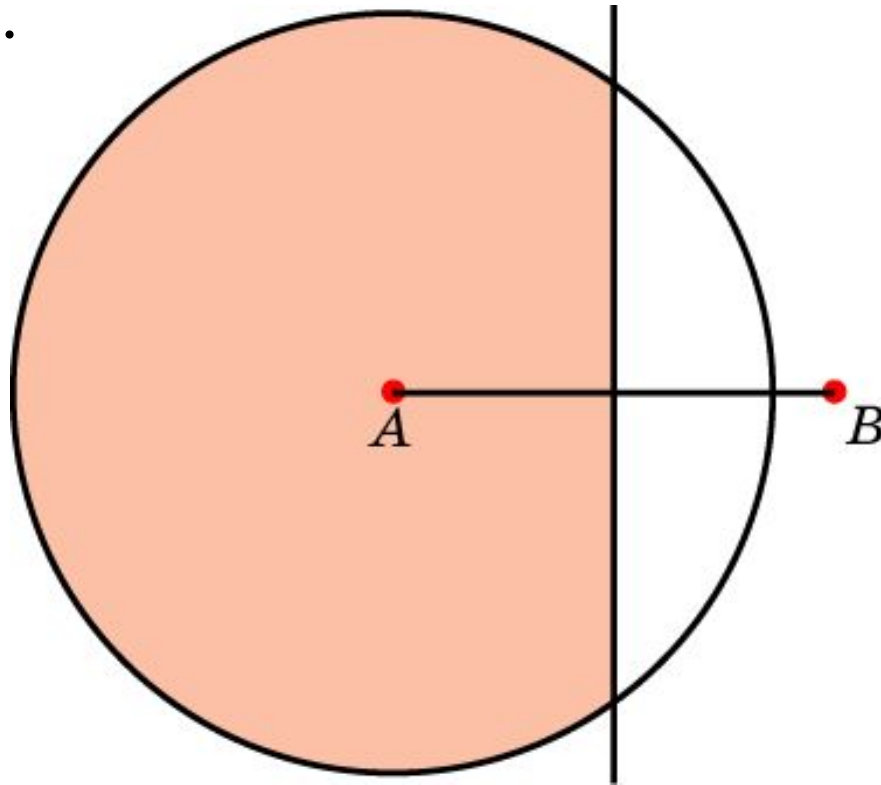
Даны три точки:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Найдите точки, которые одинаково удалены от точек  $A$  и  $B$  и находятся на расстоянии  $R$  от точки  $C$ .

**Ответ:** Точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку  $AB$  и окружности с центром в точке  $C$  и радиусом  $R$ .



## Упражнение 14

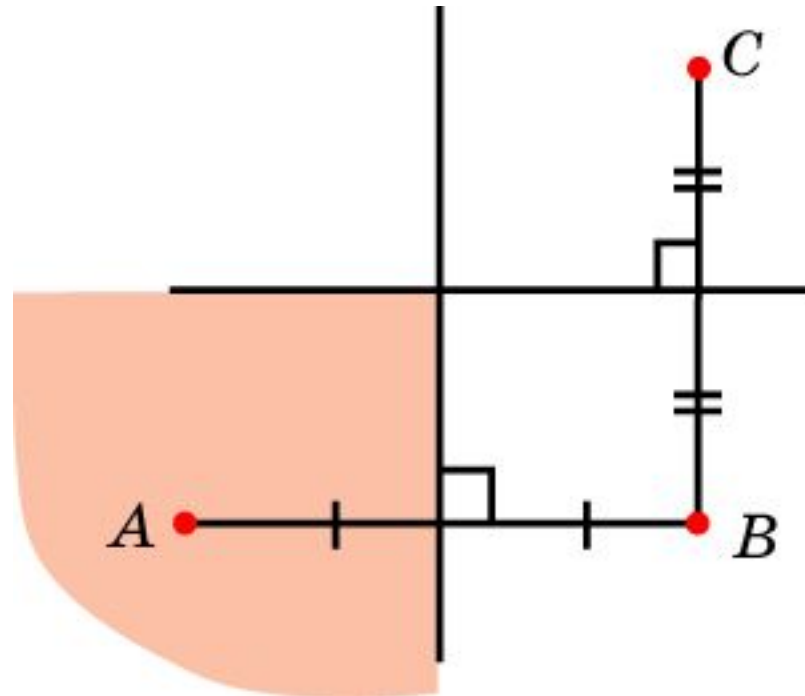
Даны две точки  $A$  и  $B$ . Найдите ГМТ  $C$ , для которых  $CA \leq CB \leq AB$ . Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



**Ответ:** Искомое ГМТ является пересечением круга и полуплоскости.

## Упражнение 15

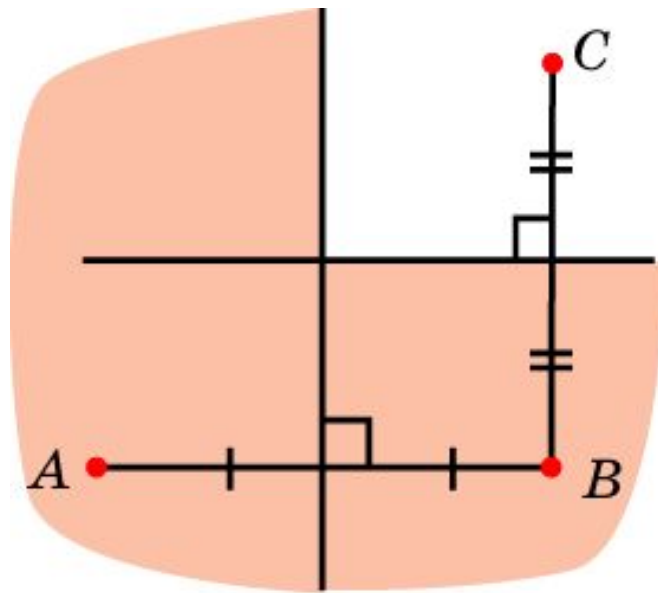
Даны три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Найдите ГМТ  $X$ , для которых  $AХ = ВХ$  и  $ВХ = СХ$ . Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



**Ответ:** Искомое ГМТ является пересечением двух полупространств, определяемых серединными перпендикулярами к отрезкам  $AB$  и  $BC$ .

## Упражнение 16

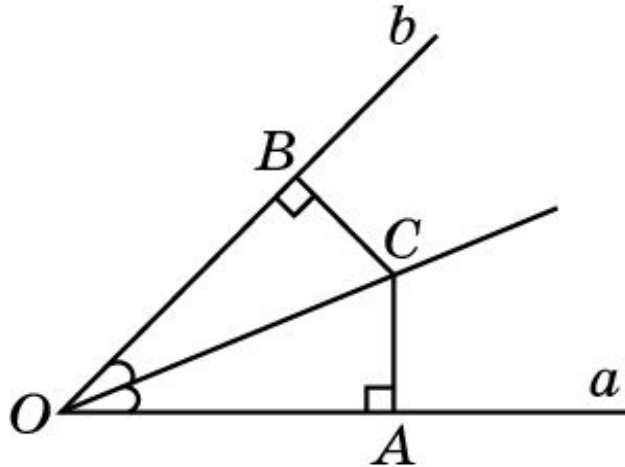
Даны три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Найдите ГМТ  $X$ , для которых  $AХ$   $BХ$  или  $BХ$   $CХ$ . Объединением каких фигур является искомое ГМТ.



**Ответ:** Искомое ГМТ является объединением двух полупространств, определяемых серединными перпендикулярами к отрезкам  $AB$  и  $BC$ .

# Биссектриса угла

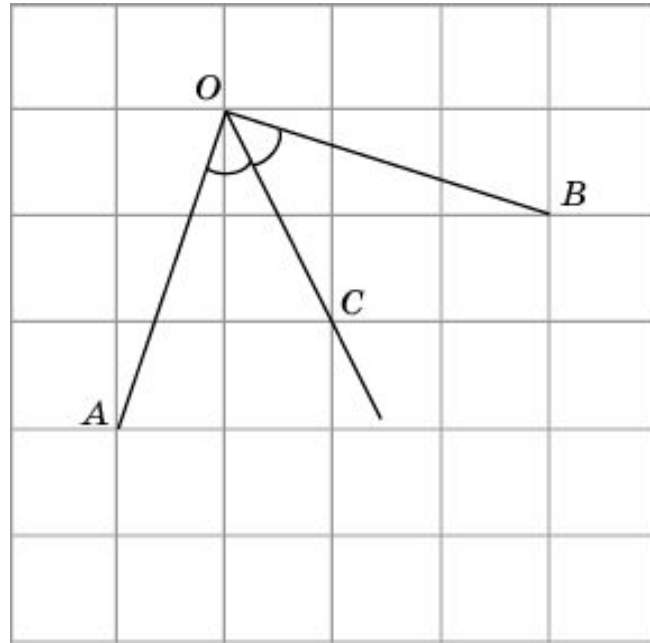
**Теорема.** Биссектриса угла является ГМТ, лежащих внутри этого угла и одинаково удаленных от его сторон.



**Доказательство.** Рассмотрим угол с вершиной в точке  $O$  и сторонами  $a$ ,  $b$ . Пусть точка  $C$  лежит внутри данного угла. Опустим из нее перпендикуляры  $CA$  и  $CB$  на стороны  $a$  и  $b$ . Если  $CA = CB$ , то прямоугольные треугольники  $AOC$  и  $BOC$  равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, углы  $AOC$  и  $BOC$  равны. Значит, точка  $C$  принадлежит биссектрисе угла. Обратное, если точка  $C$  принадлежит биссектрисе угла, то прямоугольные треугольники  $AOC$  и  $BOC$  равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно,  $AC = BC$ . Значит, точка  $C$  одинаково удалена от сторон данного угла.

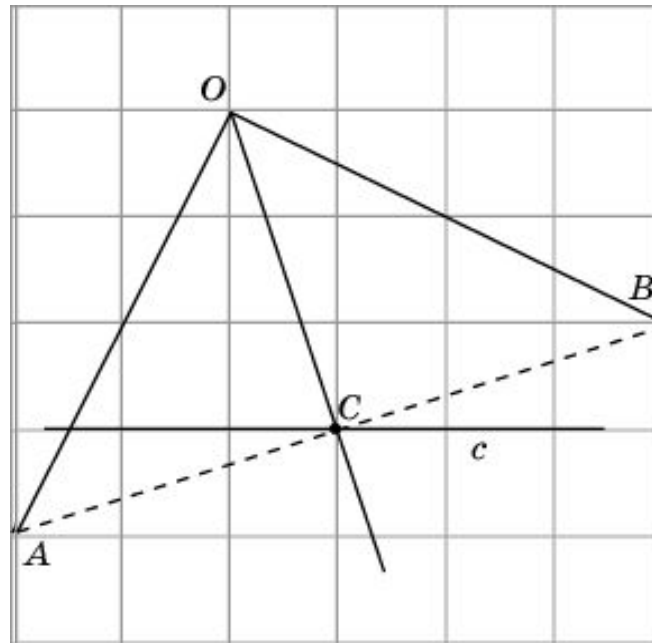
# Упражнение 17

Постройте геометрическое место внутренних точек угла  $AOB$ , равноудаленных от его сторон.



# Упражнение 18

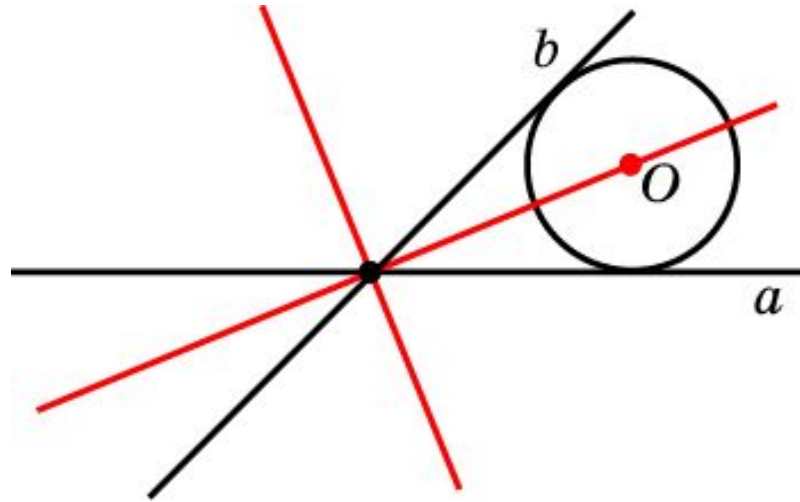
На прямой  $c$  отметьте точку  $C$ , равноудаленную от сторон угла  $AOB$ .





## Упражнение 19

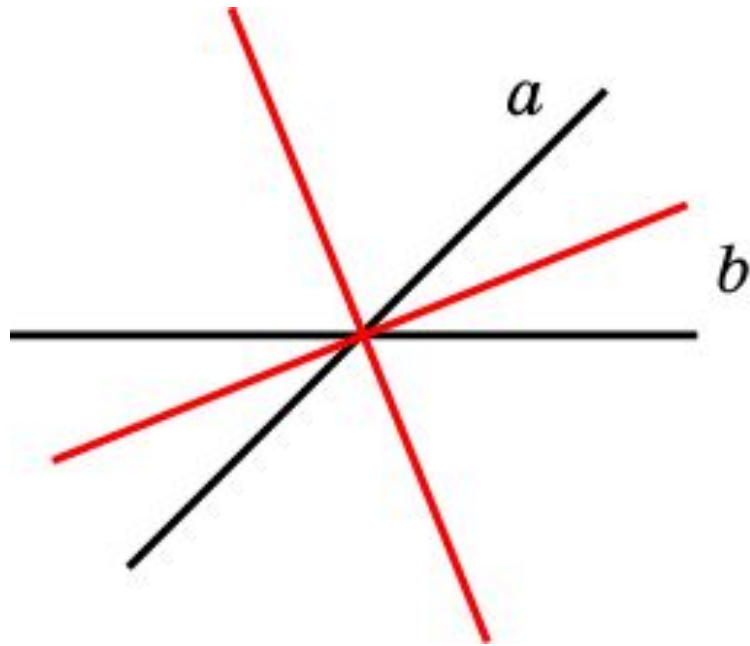
Что является геометрическим местом центров окружностей касающихся двух данных пересекающихся прямых?



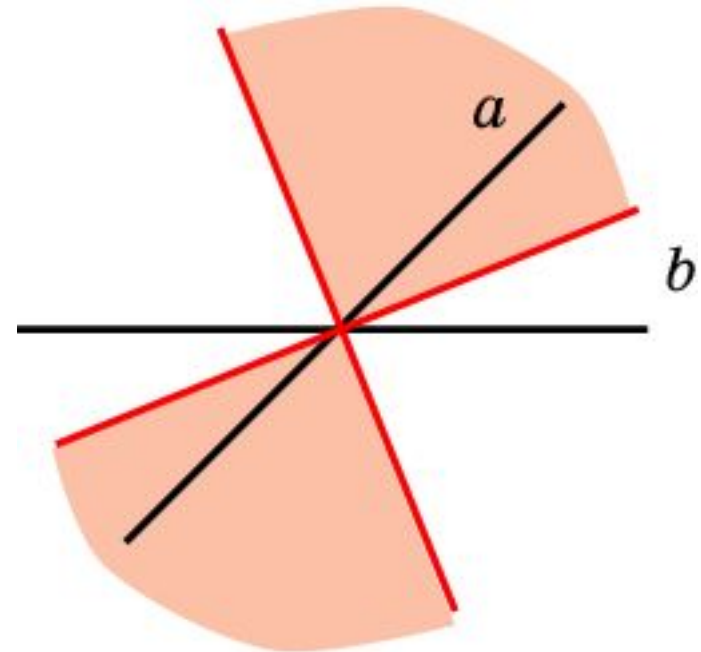
**Ответ:** Биссектрисы углов, образующихся при пересечении данных прямых, без точки пересечения этих прямых.

## Упражнение 20

Пусть  $a$  и  $b$  - пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек: а) одинаково удаленных от  $a$  и  $b$ ; б) расположенных ближе к  $a$ , чем к  $b$ .



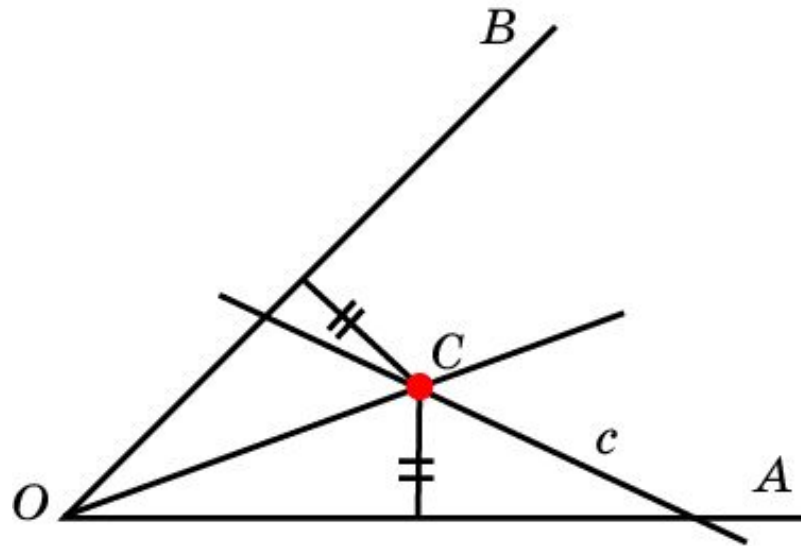
**Ответ:** а) Точки, принадлежащие биссектрисам четырех углов, образованных данными прямыми;



б) внутренности двух вертикальных углов, образованных биссектрисами.

## Упражнение 21

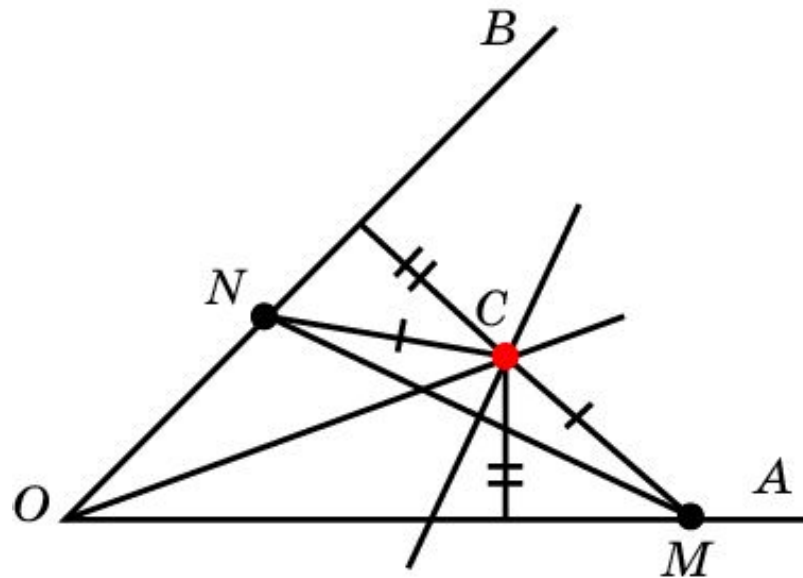
На прямой  $c$ , пересекающей стороны угла, найдите точку  $C$ , одинаково удаленную от этих сторон.



**Ответ:** Точка пересечения данной прямой  $c$  биссектрисой данного угла.

## Упражнение 22

Дан угол  $AOB$  и точки  $M, N$  на его сторонах. Внутри угла найдите точку, одинаково удаленную от точек  $M$  и  $N$  и находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон угла.



**Ответ:** Точка пересечения серединного перпендикуляра к  $MN$  с биссектрисой угла.