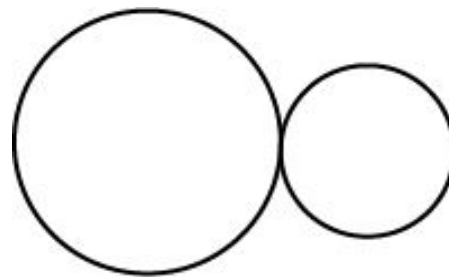
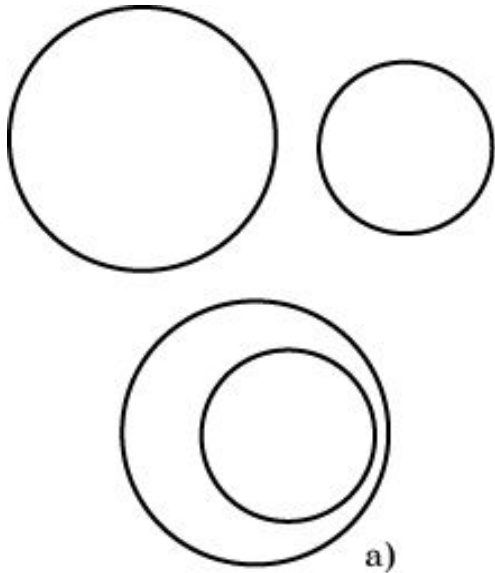
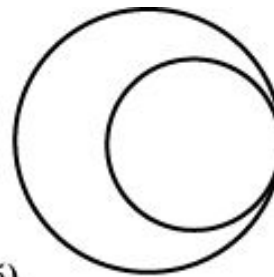


# Две окружности

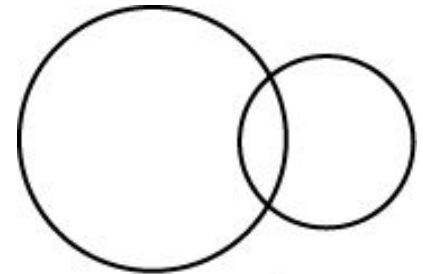
Две окружности могут: а) не иметь общих точек;  
б) иметь только одну общую точку. В этом случае окружности **касаются** к окружности. Общая точка называется **точкой касания**;  
в) иметь две общие точки. В этом случае говорят, что окружности **пересекаются**.



б)

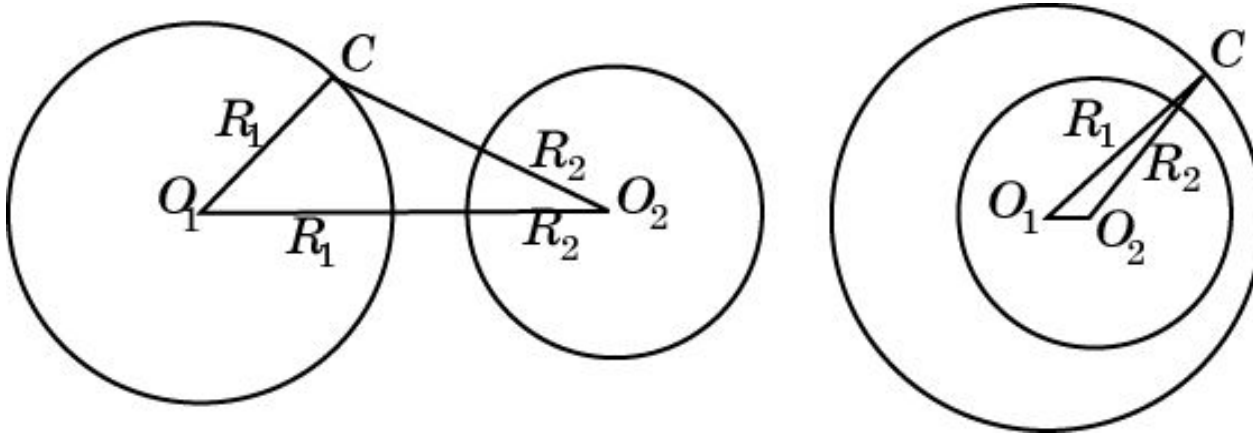


в)



# Теорема 1

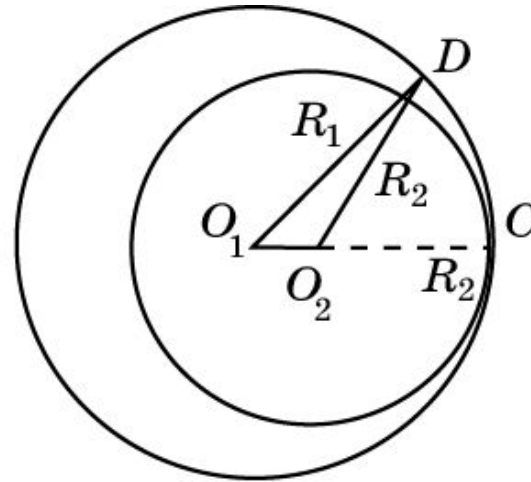
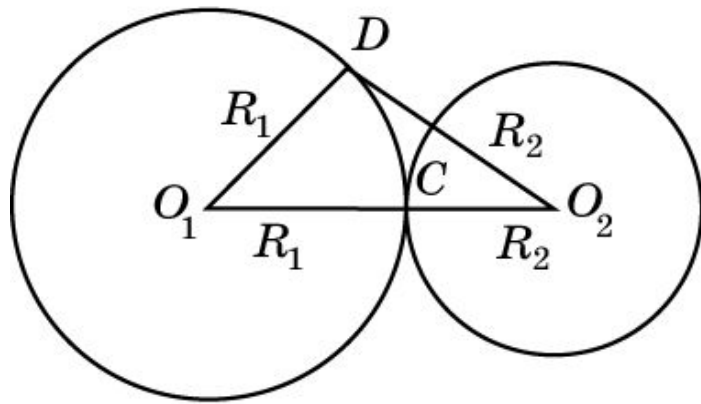
Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности, то эти окружности не имеют общих точек.



**Доказательство.** Пусть даны две окружности с центрами в точках  $O_1$ ,  $O_2$  и радиусами соответственно  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_1 + R_2 < O_1O_2$ . Рассмотрим точку  $C$  на первой окружности,  $O_1C = R_1$ . Тогда  $O_2C > O_1O_2 - O_1C > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$  и, следовательно, точка  $C$  не принадлежит второй окружности. Значит, эти окружности не имеют общих точек. Аналогичным образом доказывается, что если  $O_1O_2 < R_1 - R_2$  ( $R_1 > R_2$ ), то окружности также не имеют общих точек.

## Теорема 2

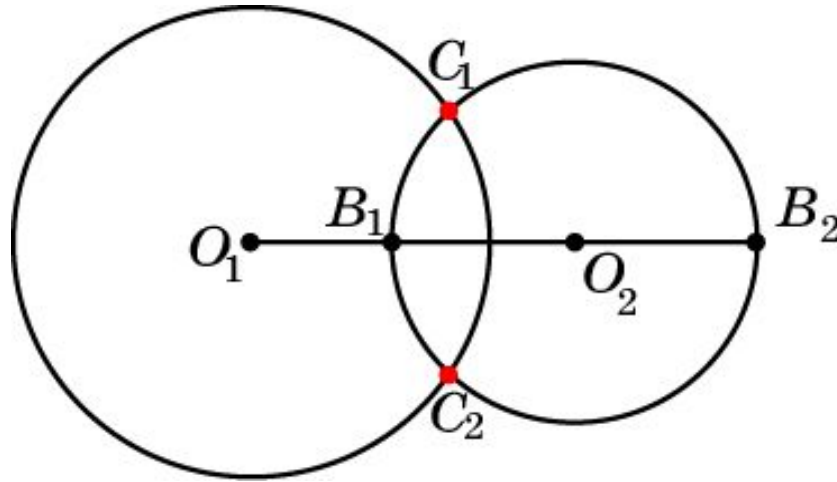
Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме или разности их радиусов, то эти окружности касаются.



**Доказательство.** Пусть даны две окружности с центрами в точках  $O_1$ ,  $O_2$  и радиусами соответственно  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_1 + R_2 = O_1O_2$ . Рассмотрим точку  $C$  на отрезке  $O_1O_2$ , для которой  $O_1C = R_1$ ,  $O_2C = R_2$ . Она будет общей точкой для данных окружностей. Если  $D$  – точка на первой окружности, отличная от  $C$ , то из неравенства треугольника следует, что  $O_2D > O_1O_2 - O_1D = R_1 + R_2 - R_1 = R_2$ , следовательно, точка  $D$  не принадлежит второй окружности. Значит, данные окружности имеют только одну общую точку, т.е. касаются. Аналогичным образом доказывается, что если  $O_1O_2 = R_1 - R_2$  ( $R_1 > R_2$ ), то окружности также касаются.

## Теорема 3

Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разностей, то эти окружности пересекаются.



# Вопрос 1

Сколько общих точек могут иметь две окружности?

Ответ: Ни одной, одну или две.

## Вопрос 2

Какие две окружности называются  
касающимися?

**Ответ:** Две окружности называются  
касающимися, если они имеют только одну  
общую точку.

## Вопрос 3

Какие две окружности называются пересекающимися?

**Ответ:** Две окружности называются пересекающимися, если они имеют две общие точки.

## Вопрос 4

Какие окружности называются  
концентрическими?

**Ответ:** Окружности называются  
концентрическими, если они имеют общий  
центр.



## Вопрос 5

В каком случае две окружности не имеют общих точек?

**Ответ:** Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности.

## Вопрос 6

В каком случае две окружности касаются: а) внешним образом; б) внутренним образом?

**Ответ:** а) Если расстояние между их центрами равно сумме радиусов;  
б) если расстояние между их центрами равно разности радиусов.

## Вопрос 7

В каком случае две окружности пересекаются?

**Ответ:** Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разностей.

## Упражнение 1

Дана окружность радиуса 3 см и точка  $A$  на расстоянии, равном 5 см, от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке  $A$ .

Ответ: 2 см.

## Упражнение 2

Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см?

Ответ: а) Касаются;  
б) не имеют общих точек.

## Упражнение 3

Расстояние между центрами двух окружностей равно 2 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 3 см и 5 см; б) 2 см и 5 см?

Ответ: а) Касаются;  
б) не имеют общих точек.

## Упражнение 4

Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 4 см и 6 см, если окружности: а) касаются внешне; б) касаются внутренне?

Ответ: а) 10 см; б) 4 см.

## Упражнение 5

Радиусы двух concentрических окружностей относятся как  $3:7$ . Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна  $24$  см.

Ответ:  $36$  см и  $84$  см.



## Упражнение 6

Две окружности касаются внешним образом. Радиусы окружностей относятся как 2:3. Найдите диаметры окружностей, если расстояние между их центрами равно 10 см.

Ответ: 8 см и 12 см.

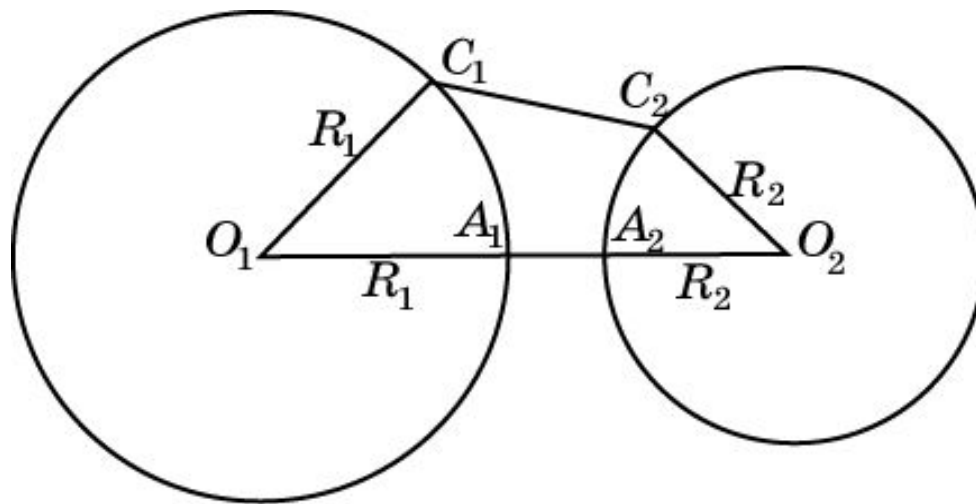
## Упражнение 7

Две окружности касаются внутренним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если они относятся как 5:2, а расстояние между центрами равно 15 см.

Ответ: 25 см и 10 см.

## Упражнение 8

Расстояние между центрами двух окружностей равно  $d$  и больше суммы их радиусов  $R_1$  и  $R_2$ . Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.



Ответ:  $d - R_1 - R_2$ .

## Упражнение 9

Расстояние между центрами двух окружностей равно  $d$  и больше суммы их радиусов  $R_1$  и  $R_2$ . Найдите наибольшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.

Ответ:  $d + R_1 + R_2$ .

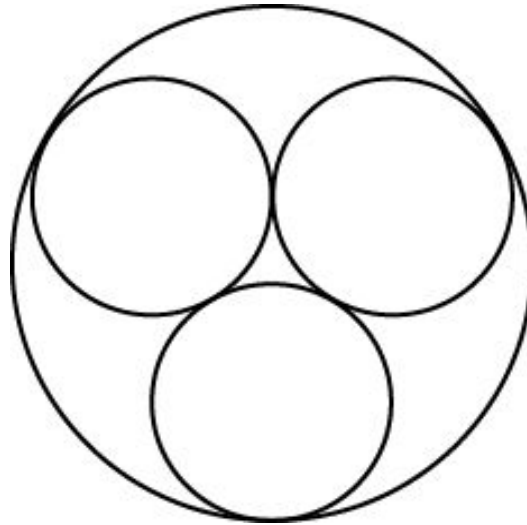
## Упражнение 10

Расстояние между центрами двух окружностей равно  $d$  и меньше разности  $R_1 - R_2$  их радиусов. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между точками, расположенными на данных окружностях.

Ответ:  $R_1 - R_2 - d$ ;  $R_1 + R_2 + d$ .

## Упражнение 11

Могут ли попарно касаться друг друга: а) три окружности; б) четыре окружности; в) пять окружностей?



Ответ: а) Да; б) да; в) нет.

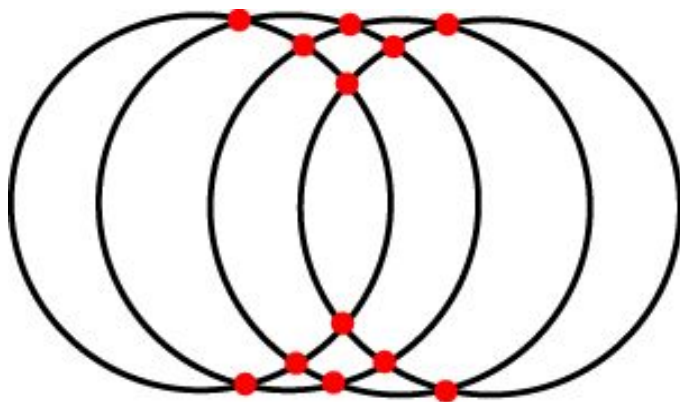
## Упражнение 12

Могут ли попарно касаться друг друга четыре окружности одинакового радиуса?

Ответ: Нет.

## Упражнение 13

Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности?

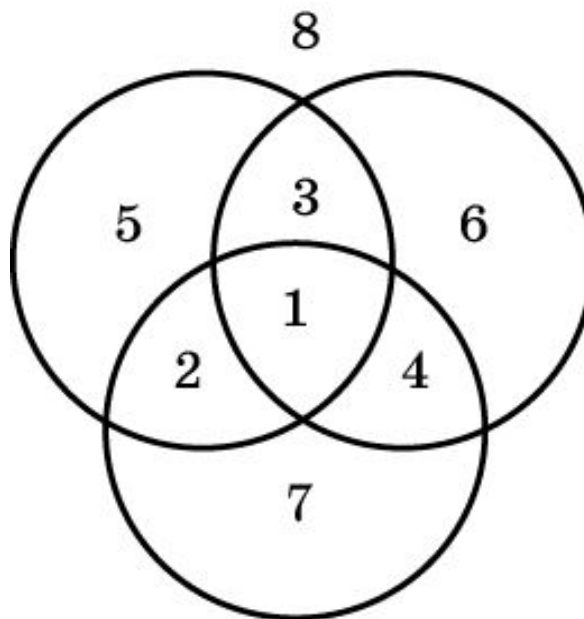


Ответ: а) 2; б) 6; в) 12.



## Упражнение 14

На какое наибольшее число частей могут делить плоскость: а) одна окружность; б) две окружности; в) три окружности?

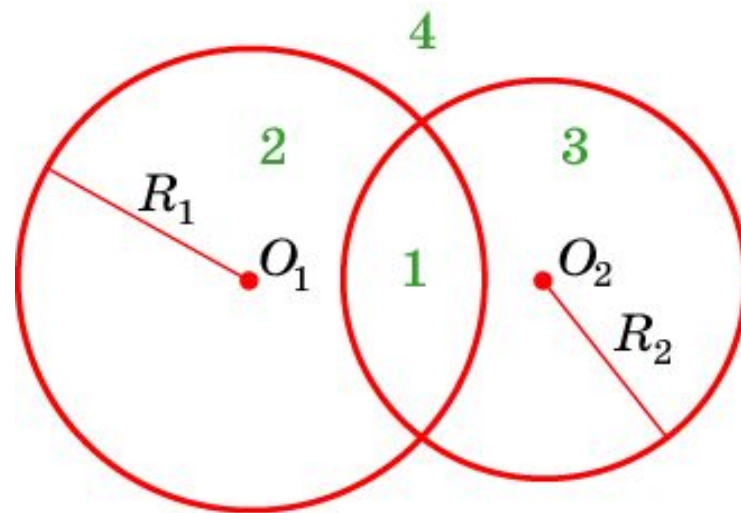


Ответ: а) 2;  
б) 4;  
в) 8.

## Упражнение 15

Две окружности с центрами в точках  $O_1$ ,  $O_2$  и радиусами  $R_1$ ,  $R_2$  разбили плоскость на четыре области. Какой области принадлежит точка  $A$ , для которой выполняются неравенства:

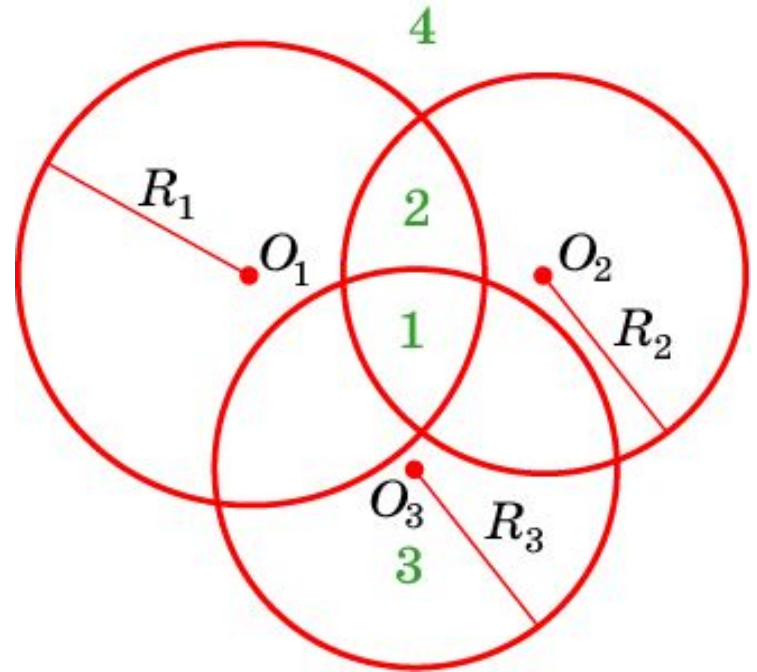
- а)  $AO_1 < R_1$  и  $AO_2 < R_2$ ;
- б)  $AO_1 < R_1$  и  $AO_2 > R_2$ ;
- в)  $AO_1 > R_1$  и  $AO_2 < R_2$ ;
- г)  $AO_1 > R_1$  и  $AO_2 > R_2$ ;



**Ответ:** а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

## Упражнение 16

Три окружности разбили плоскость на восемь областей. Напишите неравенства, которым удовлетворяет точка  $A$ , принадлежащая области: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.



Ответ:

- а)  $AO_1 < R_1, AO_2 < R_2, AO_3 < R_3$ ;
- б)  $AO_1 < R_1, AO_2 < R_2, AO_3 > R_3$ ;
- в)  $AO_1 > R_1, AO_2 > R_2, AO_3 < R_3$ ;
- г)  $AO_1 > R_1, AO_2 > R_2, AO_3 > R_3$ .