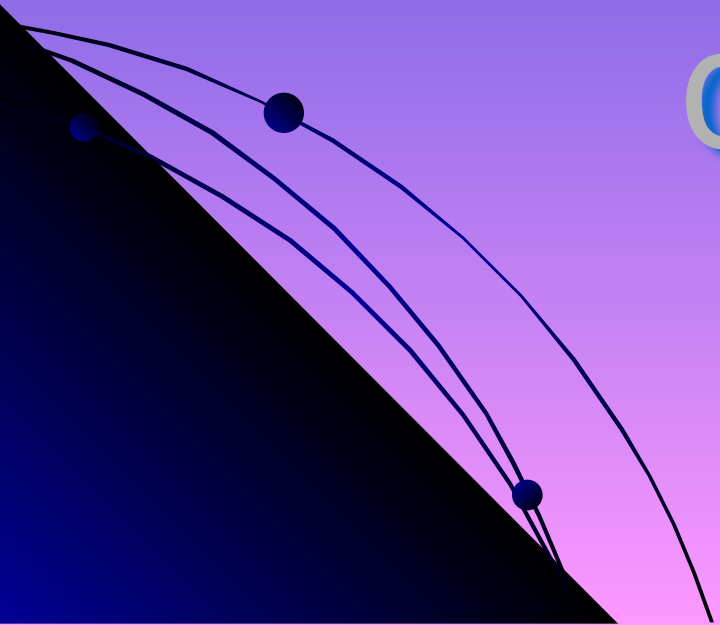


# Применения производной к исследованию функций



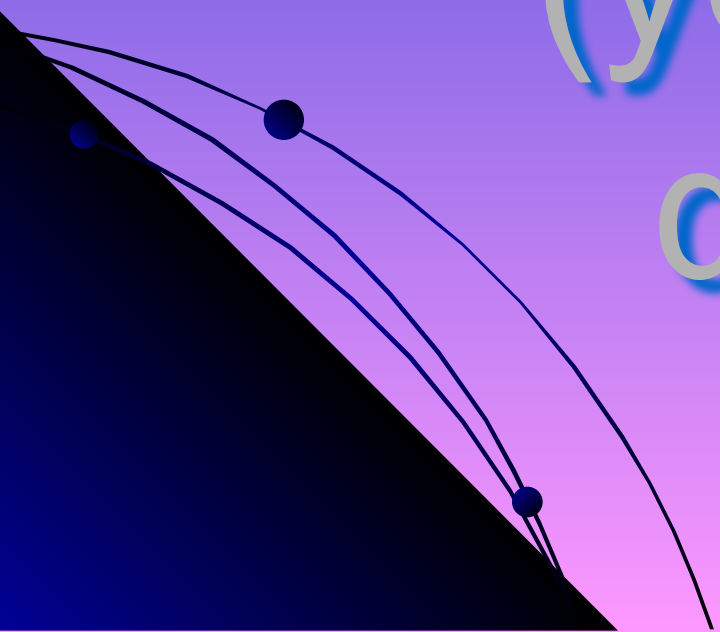
# Оглавление

- **Схема исследования функций;**
- **Признак возрастания (убывания) функции:**
  - Достаточный признак возрастания функции;
  - Достаточный признак убывания функции;
- **Критические точки функции:**
  - Необходимое условие экстремума;
  - Признак максимума функции;
  - Признак минимума функции.

# Схема исследования функций

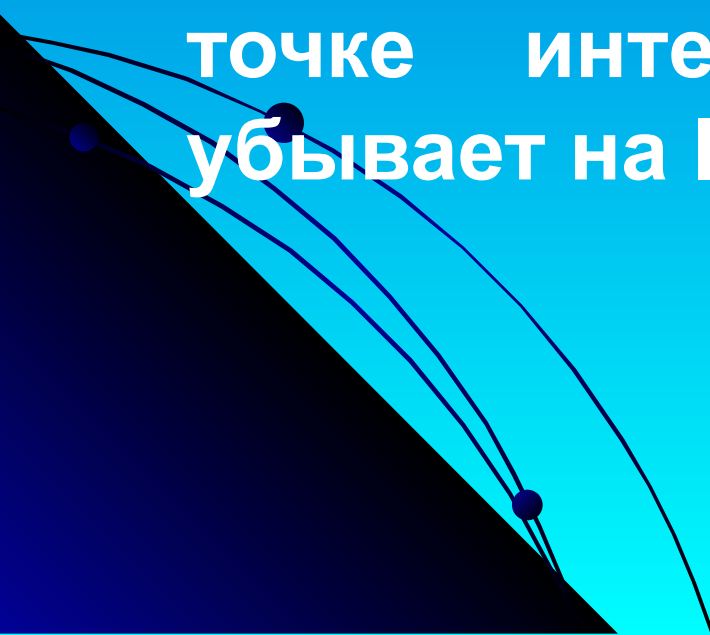
- Найти области определения и значений данной функции  $f$ .
- Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование.
- Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
- Найти промежутки знакопостоянства функции  $f$ .
- Выяснить, на каких промежутках функция  $f$  возрастает, а на каких убывает.
- Найти точки и вид экстремума и вычислить значения  $f$  в этих точках.
- Исследовать поведение функции  $f$  в окрестности характерных точек, не входящих в область определения.

# Признак возрастания (убывания) функции



*Достаточный признак возрастания функции.* Если  $f'(x) > 0$  в каждой точке интервала  $I$ , то функция возрастает на  $I$ .

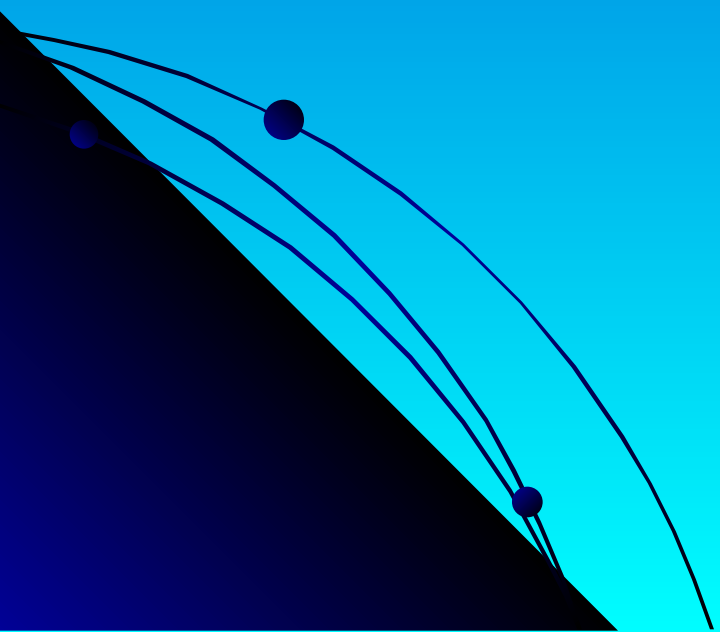
*Достаточный признак убывания функции.* Если  $f'(x) < 0$  в каждой точке интервала  $I$ , то функция убывает на  $I$ .



# Доказательство признака возрастания (убывания) функции

Доказательство проводится на основании  
формулы Лагранжа:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



# Пример нахождения промежутков возрастания (убывания) функции

*Дано:*

$$f(x) = -2x + \sin x$$

*Найти:*

промежутки возрастания  
(убывания) функции

Решение

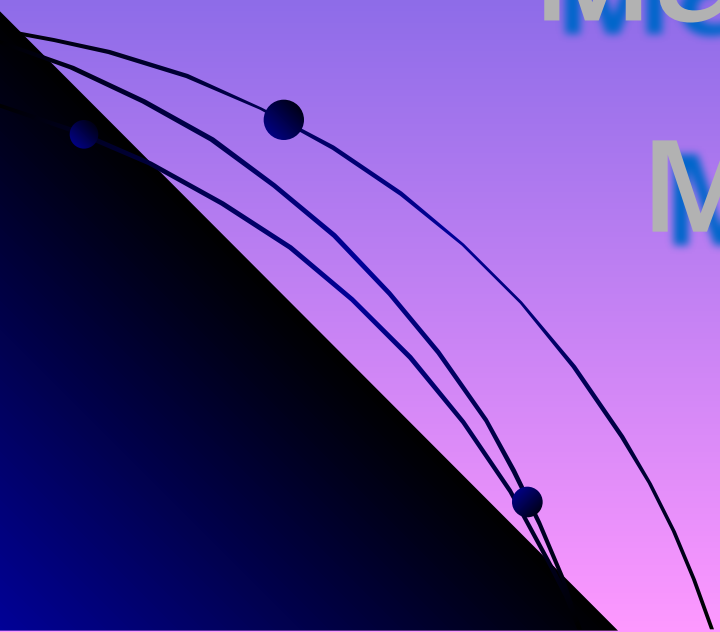
*Функция определена на всей числовой прямой.*

*Найдем  $f'(x)$ .  $f'(x) = -2 + \cos x$ .*

*$|\cos x| \leq 1 \Rightarrow f'(x) < 0$  для всех действительных  $x$ .*

*Вывод:  $f(x) = -2x + \sin x$  убывает на всей числовой прямой*

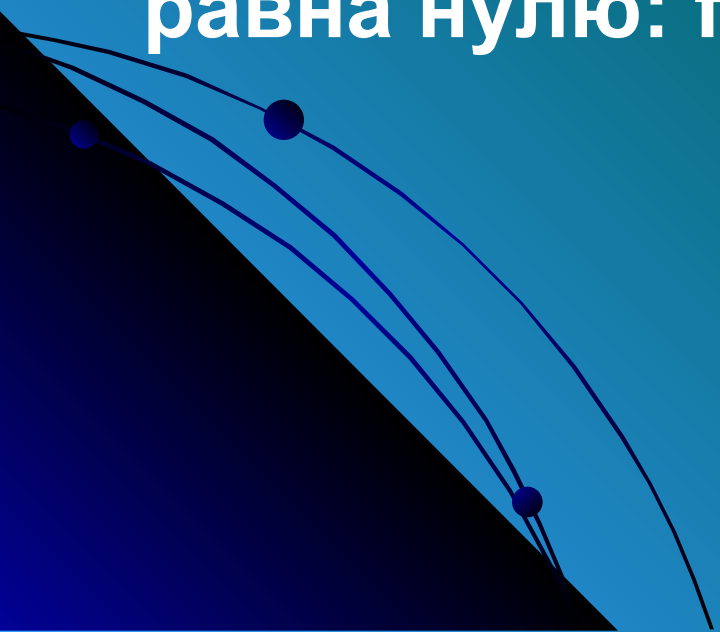
# Критические точки функции, максимумы и минимумы



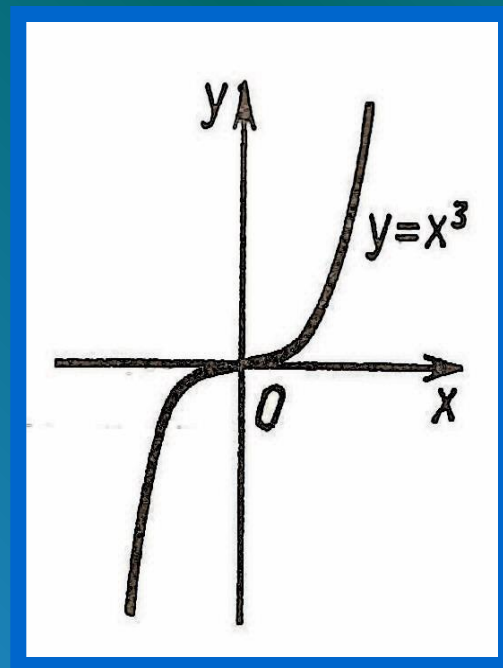


# Необходимое условие экстремума (теорема Ферма)

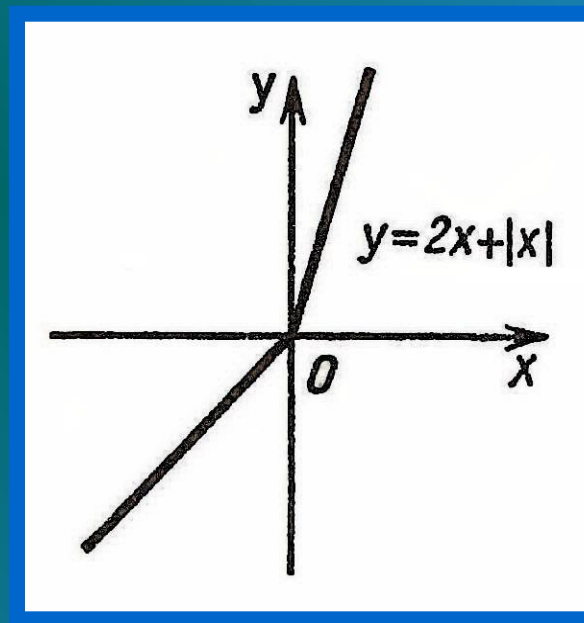
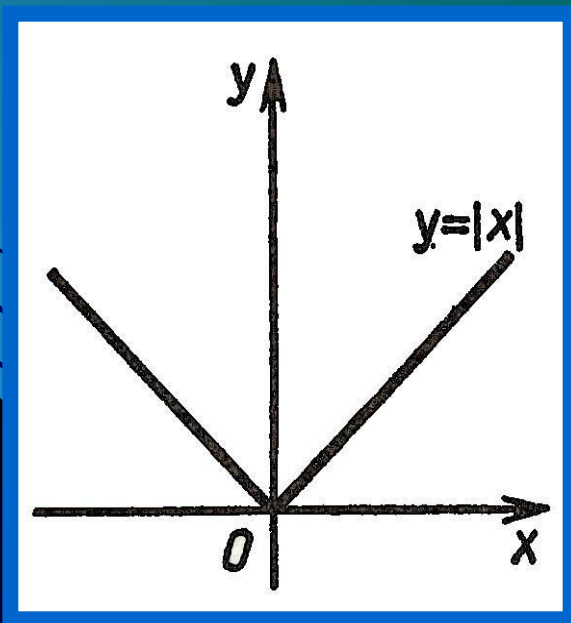
Если точка  $x_0$  является точкой экстремума функции  $f$  и в этой точке существует производная  $f'$ , то она равна нулю:  $f'(x_0) = 0$



Теорема Ферма есть лишь необходимое условие экстремума. Из того, что производная в точке  $x_0$  обращается в нуль, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум.



# Примеры критических точек, в которых производная не существует



# Признак максимума функции

Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , а  $f'(x) > 0$  на интервале  $(a; x_0)$  и  $f'(x) < 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой максимума функции  $f$ .

Упрощённая формулировка признака:

*Если в точке  $x_0$  производная меняет знак с плюса на минус, то  $x_0$  есть точка максимума.*

# Признак минимума функции

Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $f'(x) < 0$  на интервале  $(a; x_0)$  и  $f'(x) > 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой минимума функции  $f$ .

Упрощённая формулировка признака:

*Если в точке  $x_0$  производная меняет знак с минуса на плюс, то  $x_0$  есть точка максимума.*

# Пример нахождения точек экстремума функции

*Дано:*

$$f(x) = 3x - x^3$$

*Найти:*

Точки экстремума функции

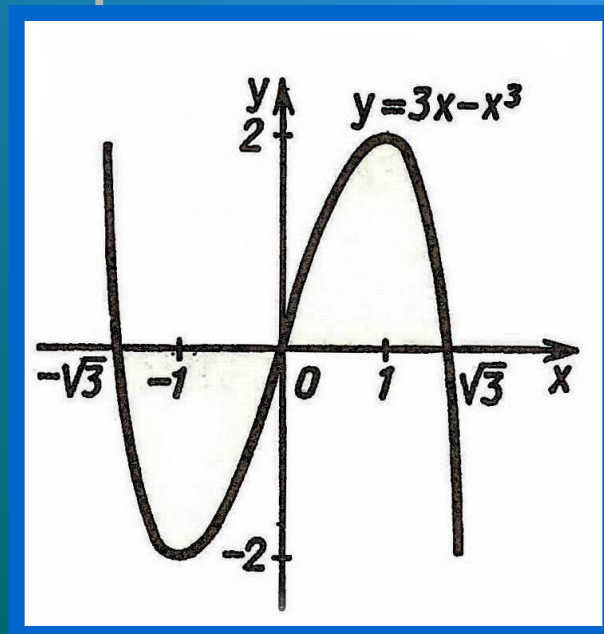
*Решение*

*Найдём производную функции:  $f'(x) = 3 - 3x^2$*

*$f'(x) = 0$ , при  $x = 1$  и  $x = -1$*

*$f'(x) < 0$  при  $x < -1$ ;  $f'(x) > 0$  при  $-1 < x < 1$ , т.е. в точках  $-1$  и  $1$  функция меняет знак.*

*По признакам максимума и минимума точка  $-1$  является точкой минимума, а точка  $1$  — точкой максимума.*



Проект выполняла Сергеева  
Вероника, ученица 11 класса,  
с использованием следующих  
материалов:

- Алгебра и начала анализа. Учебник для  
10-11 классов средней школы.
- 