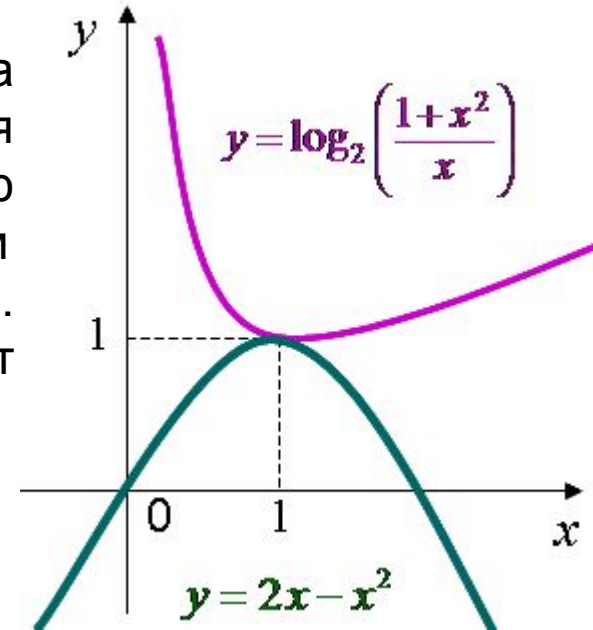


C1 метод мажорант

МЕТОД МАЖОРАНТ

Применим для задач в которых множества значений левой и правой частей уравнения или неравенства имеют единственную общую точку, являющуюся наибольшим значением для одной части и наименьшим для другой. Эту ситуацию хорошо иллюстрирует график.



Как начинать решать такие задачи?

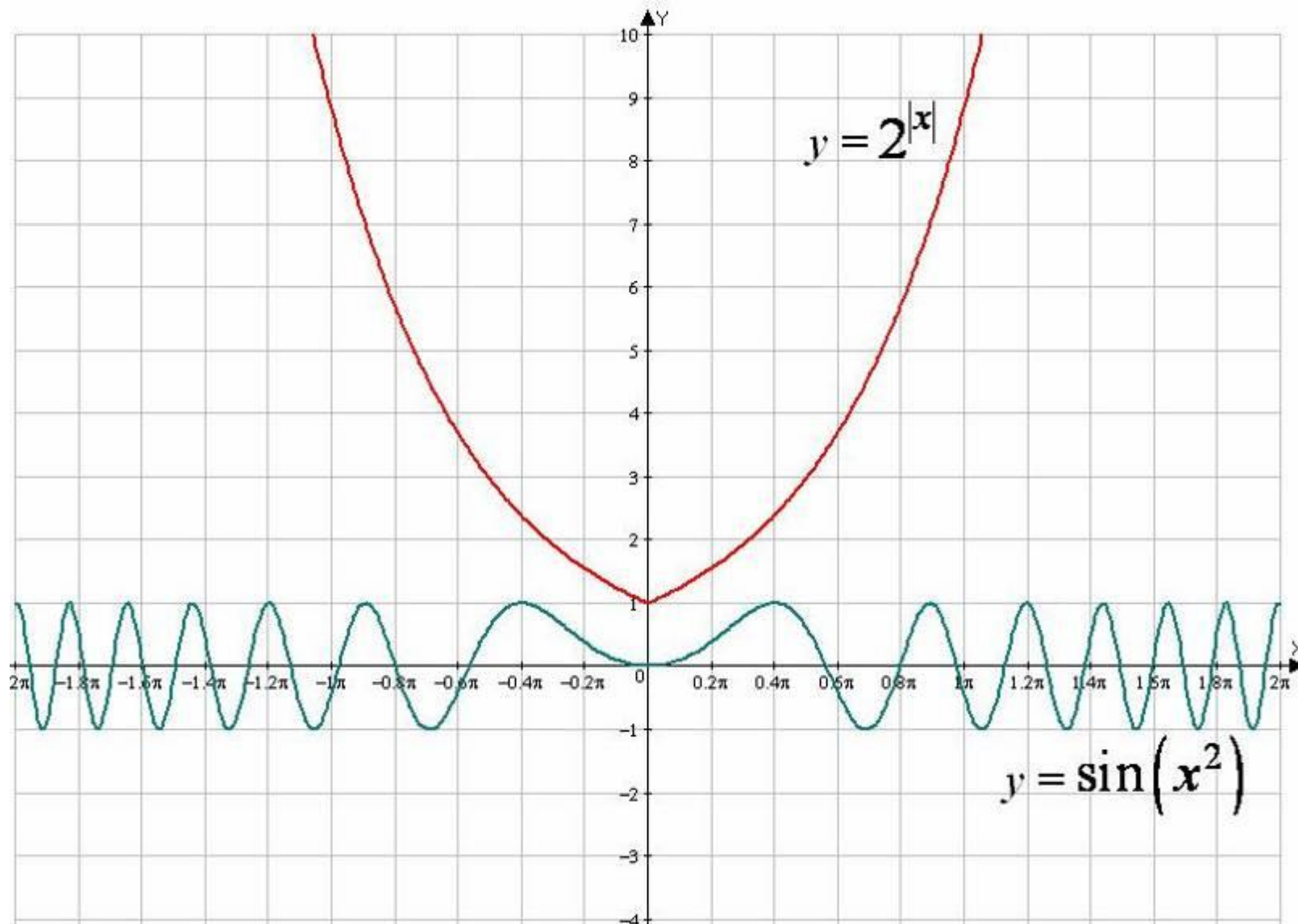
Привести уравнение или неравенство к виду $f(x) = g(x)$

Сделать оценку обеих частей. Пусть существует такое число M , из области определения такое что $f(x) \leq M$ и $g(x) \geq M$

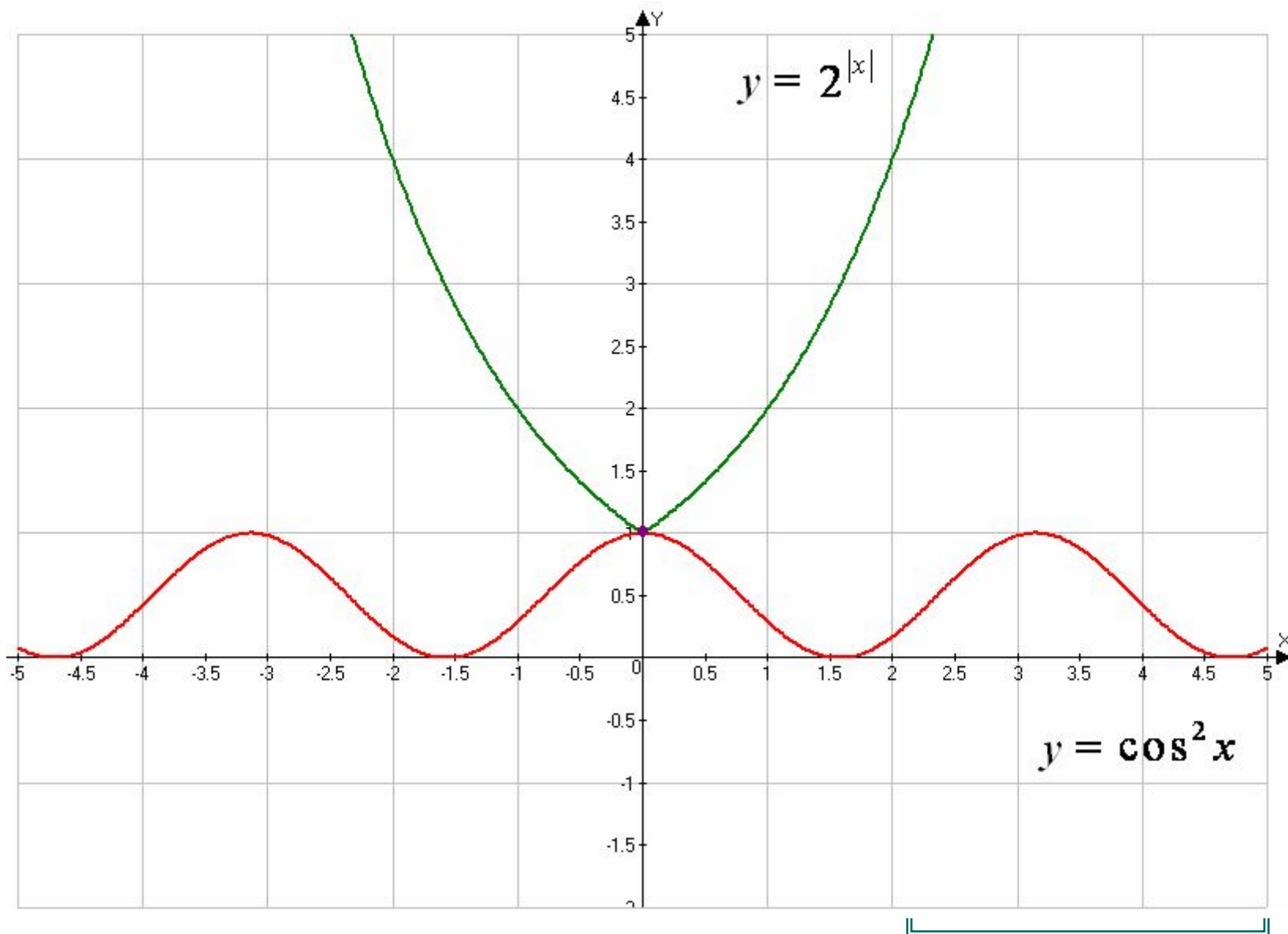
Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$

Пример 1.
уравнение

Решите $2^{|x|} = \sin(x^2).$

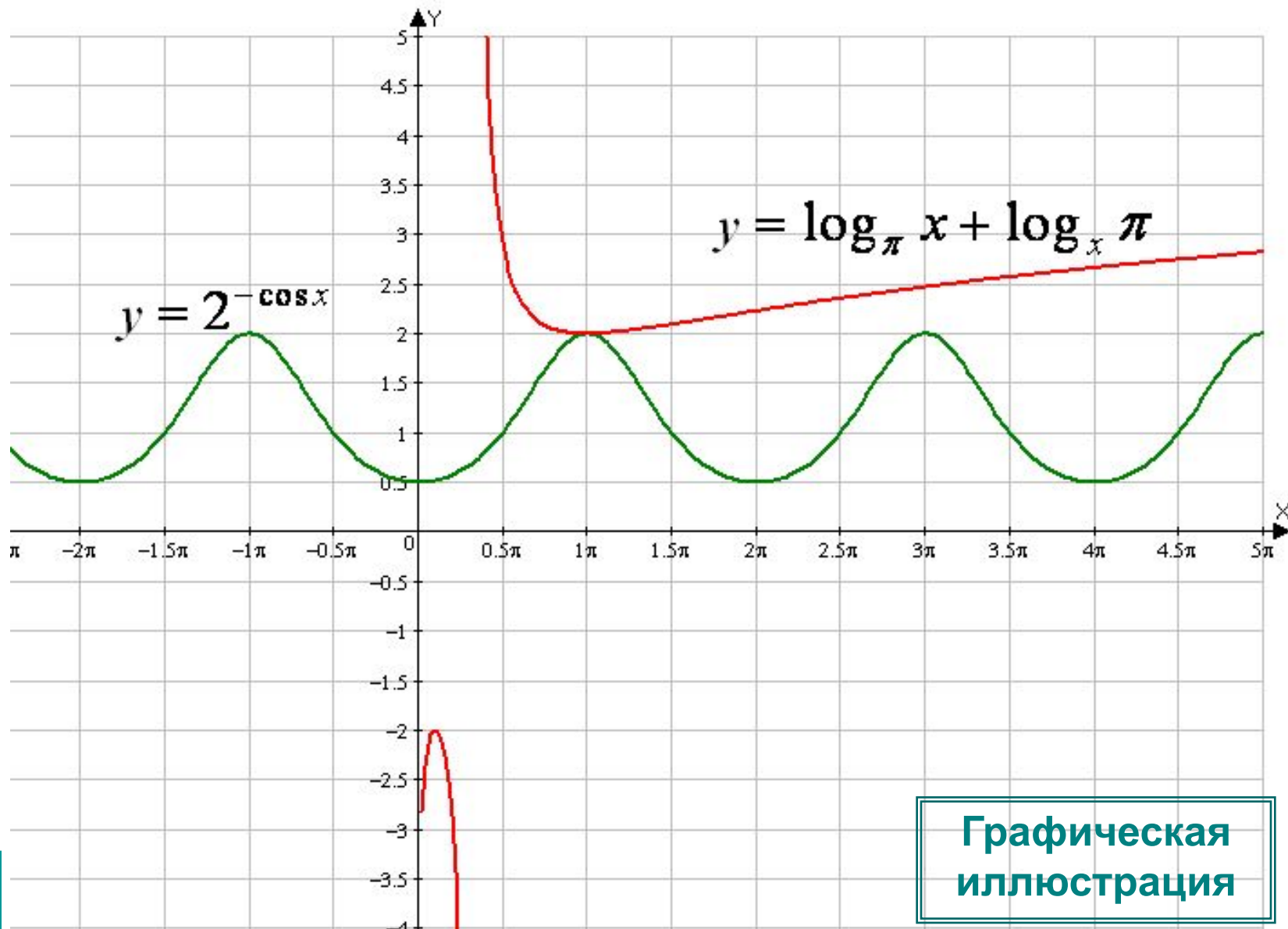


Пример 2. Решить уравнение $2^{|x|} = \cos^2 x$.



Пример 4.
уравнение

Решить $2^{-\cos x} = \log_{\pi} x + \log_x \pi.$



**Графическая
иллюстрация**

Пример 5. Решить уравнение $\sin x + \sin 9x = 2$.

Решение. Оценим обе части уравнения.

Поскольку $\sin x \leq 1$ и $\sin 9x \leq 1$, равенств
выполняется тогда и только тогда, когда
когда $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1 \end{cases}$

Решением первого уравнения системы являются значения

$$\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

При этих x найдем $\sin 9x = \sin\left(9 \cdot \frac{\pi}{2} + 18\pi n\right) = 1$.

Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ решение системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Пример 6.
уравнение

Решить $\cos 3x + \cos \frac{5}{2}x = 2.$

Решение.

Так как $|\cos 3x| \leq 1$ и $|\cos \frac{5}{2}x| \leq 1$, то $\cos 3x + \cos \frac{5}{2}x = 2$

в том случае, когда оба слагаемых одновременно равны 1.

Следовательно, данное уравнение равносильно

системе уравнений $\left\{ \begin{array}{l} \cos 3x = 1 \\ \cos \frac{5}{2}x = 1 \end{array} \right.$

решая
имеем

которые $x = 4\pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = 4\pi k, k \in Z.$

Пример 7. Решить

уравнение

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) = 4.$$

Решение. Очевидно, что $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \geq 2,$

$(1 + \operatorname{tg}^2 2y) \geq 1$ $(3 + \sin 3z) \geq 2.$ Заметим, что перемножив почленно эти неравенства,

получаем:

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) \geq 4.$$

Следовательно, левая часть равна правой, лишь при условии:

одновременно $\cos^2 x = 1, \sin 3z = -1$

Значит, данное

уравнение

равносильно системе

уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \operatorname{tg}^2 2y = 0 \\ \sin 3z = -1 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем корни:

Ответ: $x = \pi m, m \in Z; y = \frac{\pi}{2} k, k \in Z; z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \pi l, l \in Z$

Пример 8. Решите уравнение

$$\cos^2(x \cdot \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Решение. Для решения уравнения оценим его части:

$$\cos^2(x \cdot \sin x) \leq 1, \quad 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \geq 1.$$

Поэтому равенство возможно только при условии

Сначала решим второе уравнение:

$$\begin{cases} \cos^2(x \cdot \sin x) = 1 \\ 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$\log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = 1, \quad x^2 + x + 1 = 1, \quad x^2 + x = 0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$.

Проверим справедливость первого равенства, подставив эти корни.

При $x = 0$ получаем: $\cos^2(0 \cdot \sin 0) = \cos^2 0 = 1$ (верное равенство).

При $x = -1$ имеем: $\cos^2(-1 \cdot \sin(-1)) = \cos^2(\sin 1) \neq 1$ (неверное равенство).

Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: 0.

Пример 9. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^{49x^2-70x+26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$ имеет решения. Найдите эти решения.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$4^{(7x-5)^2+1} = 3 + \cos(14\pi x) - (9a+4)^2.$$

При всех значениях x

$$(7x-5)^2+1 \geq 1 \Rightarrow 4^{(7x-5)^2+1} \geq 4.$$

выражение

При всех значениях x

$$\cos 14\pi x \leq 1 \quad (9a+4)^2 \geq 0.$$

выражения

Поэтому $3 + \cos 14\pi x - (9a+4)^2 \leq 3+1=4$.

Следовательно, левая часть уравнения не меньше 4, а правая часть – не больше 4. Получаем систему:

$$\begin{cases} 4^{(7x-5)^2+1} = 4, \\ 3 + \cos 14\pi x - (9a+4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7x-5)^2 = 0, \\ \cos 14\pi x = 1, \\ (9a+4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7}, \\ a = -\frac{4}{9}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{5}{7}$ при $a = -\frac{4}{9}$.