Многогранники: виды задач и методы их решения

(типовые задания С2) - 1

Методическая разработка Амачкиной А.А.
МОУ СОШ №12,
г. Балашиха, Московской области.

1.1. Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB , если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$\textit{где} \quad A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2);$$

3) по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}, \quad \textit{èëè} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

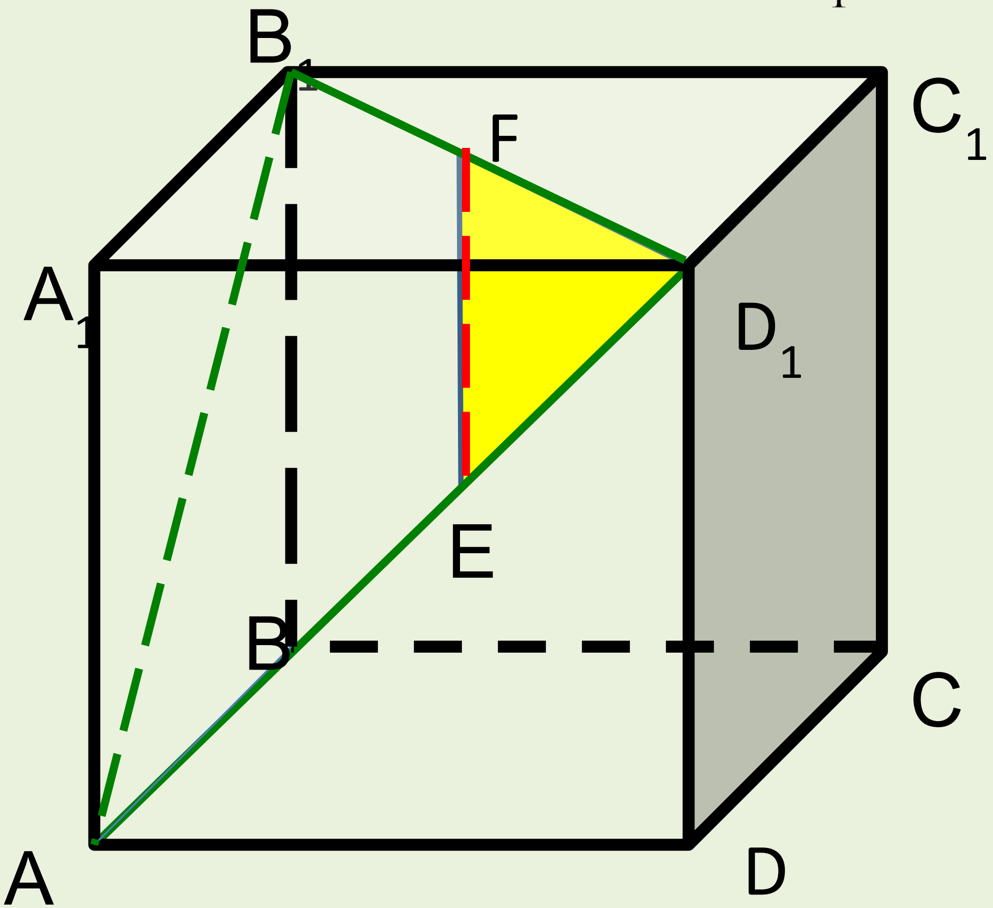
$$\textit{ãäå} \quad \{a,b,c\}-\textit{êîîðäèíàòû} \quad \textit{âåêòîðà} \quad \overrightarrow{AB}$$

Поэтапно-вычислительный метод

Пример 1.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что

$$D_1E = \frac{1}{3}AD_1,\ D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1.$$



Найти длину отрезка EF.

Решение. *Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из треугольника D_1 EF в котором*

$$D_1F = \frac{2}{3}\sqrt{2},\ D_1E = \frac{1}{3}\sqrt{2},\ \angle FD_1E = \frac{\pi}{3}$$

(треугольник AB_1D_1 является равносторонним). Имеем

$$EF^2 = D_1E^2 + D_1F^2 - 2D_1E * D_1F * \cos\frac{\pi}{3} =$$

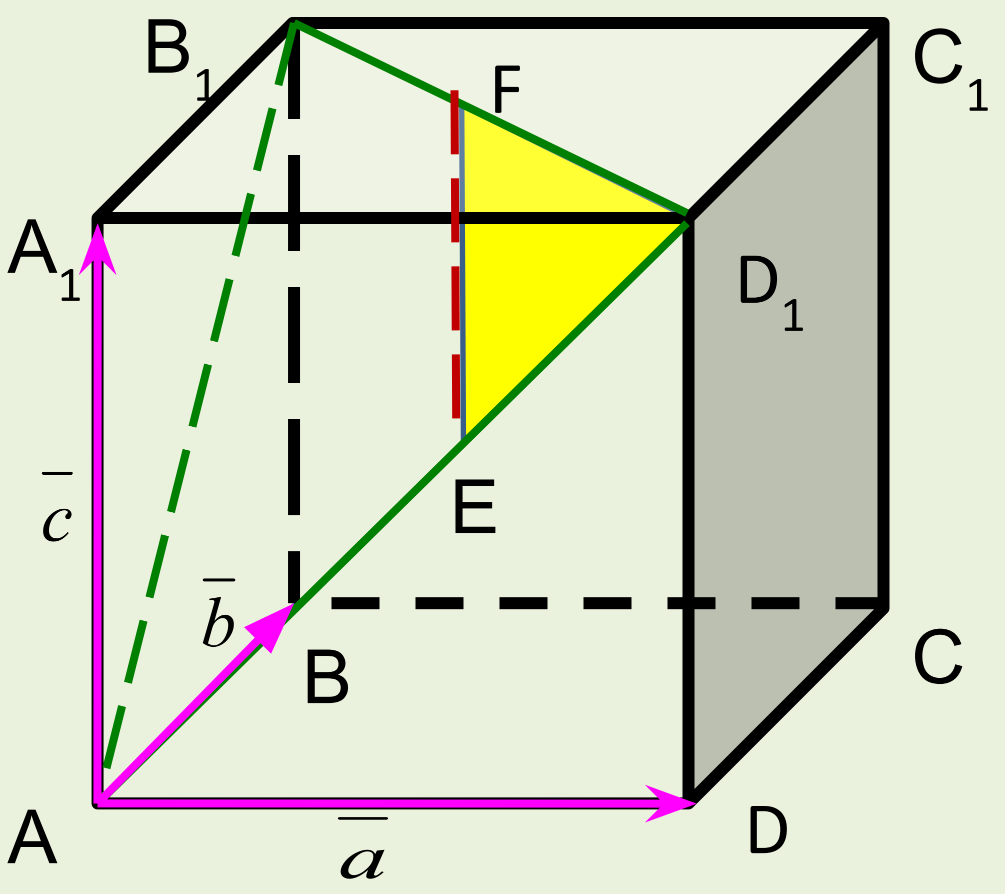
$$= \frac{3}{9} + \frac{8}{9} - 2 * \frac{\sqrt{2}}{3} * \frac{2\sqrt{2}}{3} * \frac{1}{2} = \frac{2}{3},$$ *Откуда* $EF = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Векторный метод

Пример 1. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что*

$$D_1E = \frac{1}{3}AD_1, \; D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1.$$



Найти длину отрезка EF.

Решение. *Пусть*

$\overline{AD} = \overline{a}, \qquad \overline{AB} = \overline{b}, \qquad \overline{AA_1} = \overline{c}, \qquad$ *тогда*

$\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right| = \left|\overline{c}\right| = 1, \qquad \overline{a} * \overline{b} = \overline{a} * \overline{c} = \overline{b} * \overline{c} = 0.$

Выразим вектор $\overline{FE}$ *через базисные векторы* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:

$$\overline{FE} = \overline{EA} + \overline{AB_1} + \overline{B_1F} = -\frac{2}{3}\left(\overline{a} + \overline{c}\right) + \left(\overline{b} + \overline{c}\right) + \frac{1}{3}\left(\overline{a} - \overline{b}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}$$

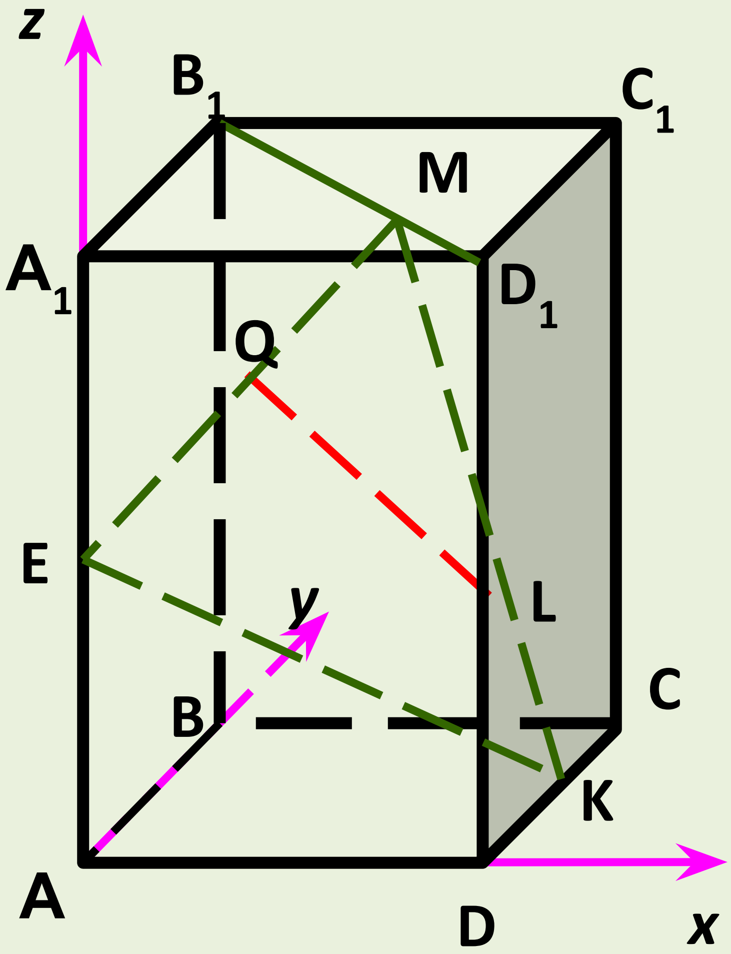
$$\left|\overline{FE}\right| = \sqrt{\overline{FE}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Замечание.

Вектор $\overline{FE}$ *в данном базисе имеет координаты* $\left\{-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right\}$, *поэтому длину этого вектора можно найти по по формуле* $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, *то есть*

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

Координатный метод



Пример 2. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K – середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найти расстояние между точками Q и L, где Q – середина отрезка EM, а L – точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.*

Решение. *Введем прямоугольную систему координат*

Тогда $E\left(0;0;\frac{1}{2}\right), K\left(1,\frac{1}{2};0\right), B(0,1,1), D_1(1,0,1).$

Для нахождения координат точки М используем формулу координат точки (опорная задача 1), делящей отрезок $B_1 D_1$ в отношении 2:1. Имеем

$$M\left(\frac{0+2*1}{1+2};\frac{1+2*0}{1+2};\frac{1+2*1}{1+2}\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1\right).$$

Аналогично получим координаты точки L, делящей отрезок МК в отношении 2:1. Имеем

$$L\left(\frac{\frac{2}{3}+2*1}{1+2};\frac{\frac{1}{3}+2*\frac{1}{2}}{1+2};\frac{1+2*0}{1+2}\right)=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{3}\right).$$

Координаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M, поэтому

$Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right)$. *Применим формулу для расстояния между точками с заданными координатами*

$$LQ=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{725}{36^2}}=\frac{5\sqrt{29}}{36}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{36}$

Используемая литература:

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: виды задач и методы их решения. **МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011 (типовые задания С2)**

Корянов А. Г., г. Брянск, akoryanov@mail.ru

Прокофьев А.А., г. Москва, aaprokof@yandex.ru