Научно – практическая конференция школьников «Эврика»

шение систем линейных алгебраических уравнений с помощью определителей

Научно – исследовательский проект

Выполнен ученицей 10 «Б» класса
СОШ № 74 г. Краснодара
Баевой Татьяной Ивановной

Научный руководитель –
учитель математики СОШ № 74
Забашта Елена Георгиевна

Цель:

изучить свойства определителей и применить их в решении систем линейных алгебраических уравнений.

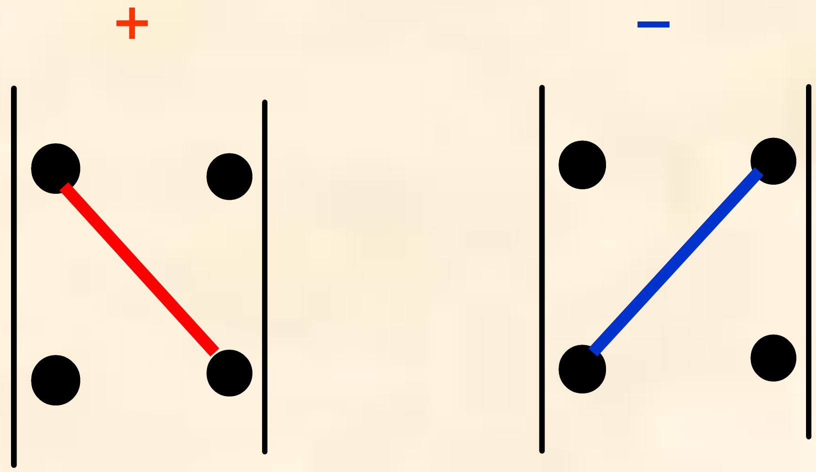
Задачи исследования:

1) рассмотрение схем вычисления определителей и их свойств;

2) решение систем линейных алгебраических уравнений и некоторых задач аналитической геометрии с помощью определителей.

Определители второго порядка

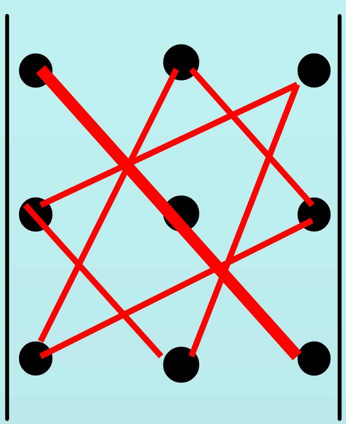
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$



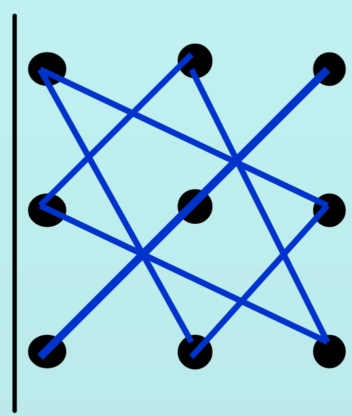
Определители третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$$



+



-

Минор и алгебраическое дополнение

Минором **какого либо элемента называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.**

Алгебраическим дополнением **элемента называется его минор, взятый со своим или противоположным знаком. согласно следующему правилу: если сумма номеров столбца и строки, на пересечении которых стоит элемент, есть число четное, то минор берется со своим знаком, если нечетное – то с противоположным.**

Разложение определителя по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

- Величина определителя не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами.
- При перестановке двух столбцов (или строк) определитель меняет знак.
- Определитель с двумя одинаковыми столбцами (или строками) равен нулю.
- Множитель, общий для элементов некоторого столбца (или строки) можно выносить за знак определителя.
- Определитель равен нулю, если все элементы некоторого столбца (или строки) равны нулю.
- Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить элементы другого столбца (строки), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

Система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

имеет единственное решение x = $\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ **; y =** $\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}_1}$

при условии, что определитель системы отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

имеет единственное решение x = $\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$

y = $\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

z = $\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

, при условии, что определитель системы не равен нулю

Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

имеет решение x = $k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ **; y =** $k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$**; z =** $k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

где k – произвольный множитель, если хотя бы один из определителей отличен от нуля. В случае, когда все определители равны нулю, система сводится к одному уравнению.

Однородная система трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

имеет решение, отличное от нулевого, когда определитель системы равен нулю.

Некоторые приложения определителей к аналитической геометрии

1. **Площадь треугольника с вершинами** $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

вычисляется по формуле

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

, где знак выбирается одинаковым со знаком определителя.

2. **Условие, при котором три точки** $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$

лежат на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. **Уравнение прямой, проходящей через две данные точки** $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. **Условие, при котором три прямые** $A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0, A_3x + B_3y + C_3 = 0$

пересекаются в одной точке:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Решение.

1–ый способ.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot 2\cdot 2 + 10\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 12\cdot(-2) - 1\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 12\cdot 4 - 10\cdot 2\cdot(-2) = 16 + 80 - 24 - 8 - 96 + 40 = 8.$$

2-ой способ.

Прибавляя удвоенный второй столбец к первому, затем к третьему столбцу и применяя формулу, получим

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 14 & 2 & 12 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 14 & 2 & 16 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 14 & 16 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{2(84-80) = 8.}$$

3-ий способ.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 4(4-24) + 2(20-12) + 4(20-2) = -80 +$
$+16 + 72 = \mathbf{8.}$

Вычислить площадь треугольника с вершинами A(1,-1), B(2,3), C(4,5).

Решение.

Вычислим соответствующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3-4+10-12+2-5 = -6.$$

Так как

$\Delta < 0$, то возьмем знак минус:

$$S = -\frac{1}{2}\Delta = (-\frac{1}{2})\cdot(-6) = 3 \text{ (кв.ед.).}$$

Ответ: 3

Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x + y = 5, \\ 3x - 2y = 12. \end{cases}$

Решение.

В данном случае: $a_1 = 4, b_1 = 1, c_1 = 5, a_2 = 3, b_2 = -2, c_2 = 12.$

Определитель системы $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

, поэтому x = $\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-10-12}{-8-3} = \dfrac{-22}{-11} = 2.$

y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{33}{-11} = -3.$

Ответ: (2;-3).

Спасибо за внимание