Научно - практическая конференция школьников "Эврика"

Решение комбинаторных задач с помощью бинома Ньютона и полиномиальной формулы

Научно – исследовательский проект

Выполнен ученицей 10 «А» класса

СОШ № 74 г. Краснодара

Щегольковой Анной

Научный руководитель –

учитель математики СОШ № 74

Забашта Елена Георгиевна

Цель: изучить и применить бином Ньютона и полиномиальную формулу к решению некоторых комбинаторных задач

Задачи:

1) ознакомиться с формулой бинома Ньютона и ее свойствами, рассмотреть треугольник Паскаля и метод его построения;

2) ознакомиться с полиномиальной формулой как обобщением бинома Ньютона;

3) рассмотреть некоторые комбинаторные задачи, решаемые с помощью бинома Ньютона и полиномиальной формулы.

Язык перечислительной комбинаторики

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

Бином Ньютона и его свойства

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

1.Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т.е. равно n + 1.

2. Сумма показателей степени a и b каждого члена разложения равна показателю степени бинома.

3. Общий член разложения имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k = 0,1,\ldots,n.$$

4. Коэффициенты разложения, одинаково удаленные от
равны между собой . Правило симметрии $C_n^k = C_n^{n-k}$

5. Правило Паскаля $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

Треугольник Паскаля

$$C_0^0$$

$$C_0^1 \quad C_1^1$$

$$C_2^0 \quad C_1^2 \quad C_2^2$$

$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$

$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

……………………………………………………

1

1 1

1 **2** 1

1 3 3 1

1 4 **6** 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 **20** 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 **70** 56 28 8 1

Некоторые соотношения для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

Полиномиальная формула

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{r_{1,..} r_k} \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}$$

Задача № 1

Доказать, что $3^{2n+3} - 24n + 37$ делится нацело на 64 при любом натуральном n.

Доказательство.

$$3^{2n+3} - 24n + 37 = 27 \cdot 9^n - 24n + 37 = 27 \cdot (1+8)^n - 24n + 37 =$$

$$= 27 \cdot (C_n^0 + C_n^1 \cdot 8 + C_n^2 \cdot 8^2 + C_n^3 \cdot 8^3 + \ldots + C_n^n \cdot 8^n) - 24n + 37 =$$

$$= 27 + 216n + 8^2(27 \cdot C_n^2 + 27 \cdot C_n^3 \cdot 8 + \ldots + 27C_n^n \cdot 8^{n-2}) - 24n + 37.$$

Обозначив выражение в скобках через a, a $\in$ N, имеем:

$$3^{2n+3} - 24n + 37 = 64 + 192n + 64a$$

Полученная сумма делится на 64, что и требовалось доказать.

Задача № 2

Доказать неравенство Бернулли

c^n > 1 + n (c – 1), где c – произвольное число, большее 1, n – натуральное число, большее 1.

Доказательство.

Для каждого натурального n и чисел a = 1 и b = c-1 верны равенства

$$c^n = (1+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m b^m$$

По условию b > 0 и n $\geq$ 2. Следовательно, каждое слагаемое (их по меньшей мере три) в полученной сумме строго положительно. Значит,

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m b^m \geq 1 + nb = \frac{n(n-1)}{2} b^2 > 1 + nb$$

и доказываемое неравенство верно.

Задача № 3

Найти разложение степени бинома $(2x-3)^5$

Решение.

$$(2x-3)^5 = (a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5 =$$

$$(2x)^5 + 5(2x)^4(-3) + 10(2x)^3(-3)^2 + 10(2x)^2(-3)^3 + 5(2x)(-3)^4 + (-3)^5 =$$

$$32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243$$

Задача № 4

Найти разложение степени тринома $(x_1 + x_2 + x_3)^4$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4 = x_1^{\,4} + x_2^{\,4} + x_3^{\,4} + 4(x_1^{\,3}x_2 + x_1^{\,3}x_3 + x_1 x_2^{\,3} + x_2^{\,3}x_3 + x_1 x_3^{\,3} + x_2 x_3^{\,3}) +$$

$$+ 6(x_1^{\,2}x_2^{\,2} + x_1^{\,2}x_3^{\,2} + x_2^{\,2}x_3^{\,2}) + 12(x_1^{\,2}x_2x_3 + x_1x_2^{\,2}x_3 + x_1x_2x_3^{\,3}).$$