

Научно - практическая конференция школьников "Эврика"

Решение комбинаторных задач с помощью бинома Ньютона и полиномиальной формулы

Научно – исследовательский проект

Выполнен ученицей 10 «А» класса

СОШ № 74 г. Краснодара

Щегольковой Анной

Научный руководитель –

учитель математики СОШ № 74

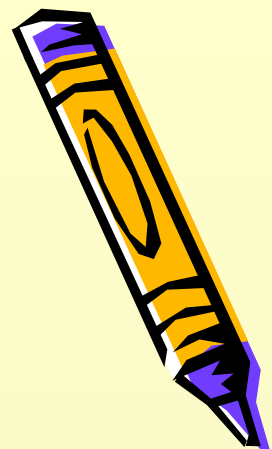
Забашта Елена Георгиевна

Цель: • изучить и применить бином Ньютона и полиномиальную формулу к решению некоторых комбинаторных задач

Задачи:

- 1) ознакомиться с формулой бинома Ньютона и ее свойствами, рассмотреть треугольник Паскаля и метод его построения;
- 2) ознакомиться с полиномиальной формулой как обобщением бинома Ньютона;
- 3) рассмотреть некоторые комбинаторные задачи, решаемые с помощью бинома Ньютона и полиномиальной формулы.

Язык перечислительной комбинаторики



$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$



БИНОМ НЬЮТОНА И ЕГО СВОЙСТВА

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т.е. равно $n + 1$.
2. Сумма показателей степени a и b каждого члена разложения равна показателю степени бинома.
3. Общий член разложения имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k = 0, 1, \dots, n.$$

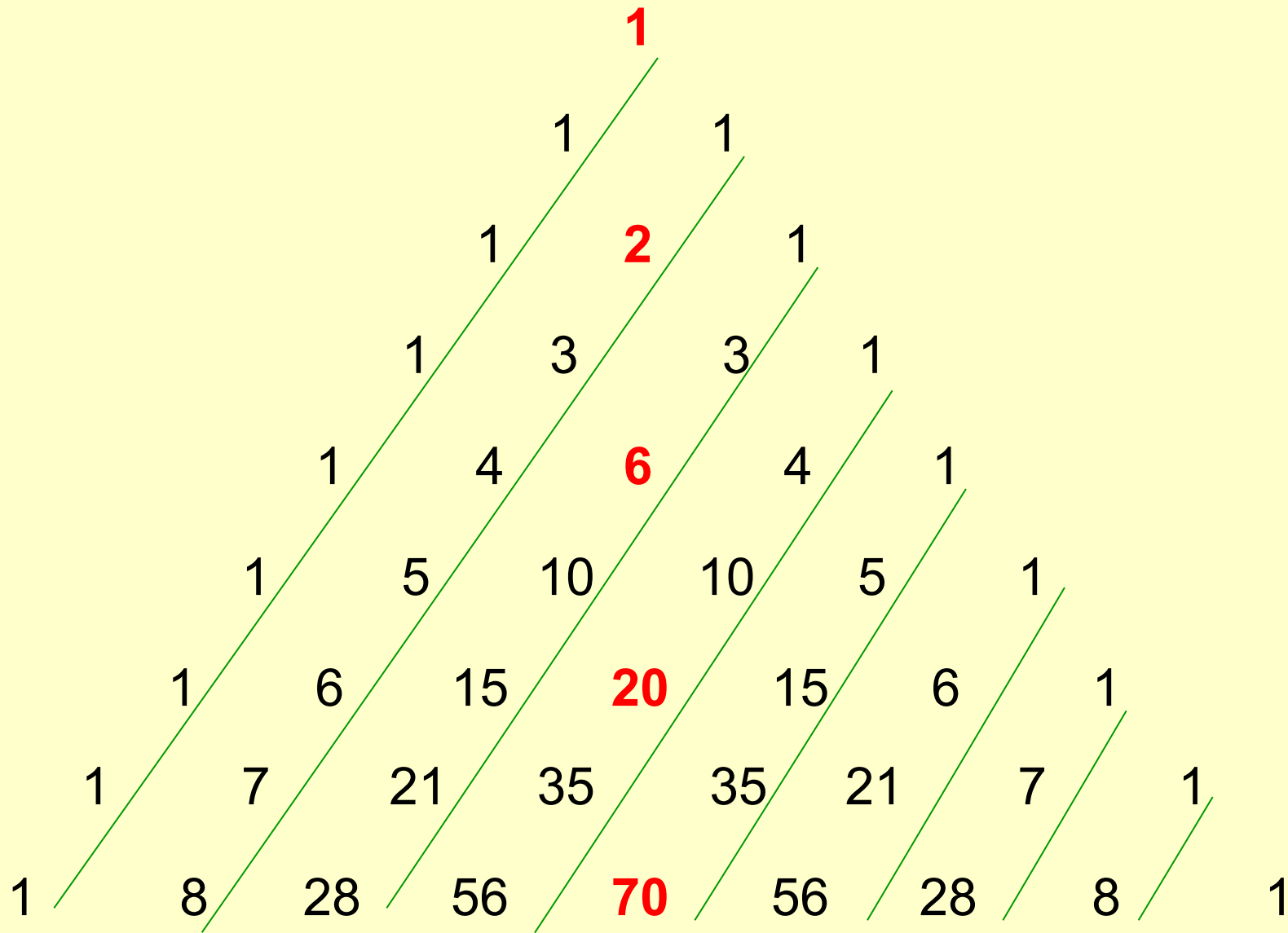
4. Коэффициенты разложения, одинаково удаленные от краев, равны между собой. Правило симметрии $C_n^k = C_n^{n-k}$
5. Правило Паскаля $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

Треугольник Паскаля

The diagram illustrates Pascal's Triangle, a triangular arrangement of binomial coefficients. The coefficients are arranged in rows, with each row containing one more coefficient than the row above it. The coefficients are labeled as C_n^k , where n is the row index (starting from 0 at the top) and k is the column index (starting from 0 on the left). The coefficients are arranged in a triangular pattern, with each coefficient being the sum of the two coefficients directly above it. The diagram shows the first five rows of the triangle, with the bottom row containing five coefficients. A dotted line is drawn below the bottom row, indicating that the triangle continues infinitely.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & C_0^0 \\ & & & & C_0^1 & C_1^1 \\ & & C_2^0 & & C_1^2 & & C_2^2 \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array}$$

.....



Некоторые соотношения для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

Полиномиальная формула

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k}$$

Задача № 1

Доказать, что $3^{2n+3} - 24n + 37$ делится нацело на 64 при любом натуральном n .

Доказательство.

$$\begin{aligned} 3^{2n+3} - 24n + 37 &= 27 \cdot 9^n - 24n + 37 = 27 \cdot (1 + 8)^n - 24n + 37 = \\ &= 27 \cdot (C_n^0 + C_n^1 \cdot 8 + C_n^2 \cdot 8^2 + C_n^3 \cdot 8^3 + \dots + C_n^n \cdot 8^n) - 24n + 37 = \\ &= 27 + 216n + 8^2 (27 \cdot C_n^2 + 27 \cdot C_n^3 \cdot 8 + \dots + 27C_n^n \cdot 8^{n-2}) - 24n + 37. \end{aligned}$$

Обозначив выражение в скобках через a , $a \in \mathbb{N}$, имеем:

$$3^{2n+3} - 24n + 37 = 64 + 192n + 64a$$

Полученная сумма делится на 64, что и требовалось доказать.

Задача № 2

Доказать неравенство Бернулли

$c^n > 1 + n(c - 1)$, где c – произвольное число, большее 1, n – натуральное число, большее 1.

Доказательство.

Для каждого натурального n и чисел $a = 1$ и $b = c-1$ верны равенства

$$c^n = (1 + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m b^m$$

По условию $b > 0$ и $n \geq 2$. Следовательно, каждое слагаемое (их по меньшей мере три) в полученной сумме строго положительно. Значит,

$$\sum_{m=0}^n C_n^m b^m \geq 1 + nb = \frac{n(n-1)}{2} b^2 > 1 + nb$$

и доказываемое неравенство верно.

Задача № 3

Найти разложение степени бинома $(2x - 3)^5$

Решение.

$$\begin{aligned}(2x - 3)^5 &= (a + b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 = \\ &= (2x)^5 + 5(2x)^4(-3) + 10(2x)^3(-3)^2 + 10(2x)^2(-3)^3 + 5(2x)(-3)^4 + (-3)^5 = \\ &= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243\end{aligned}$$

Задача № 4

Найти разложение степени тринома $(x_1 + x_2 + x_3)^4$

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^4 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 4(x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_1 x_2^3 + x_2^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2 x_3^3) + \\ &+ 6(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) + 12(x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2).\end{aligned}$$

