

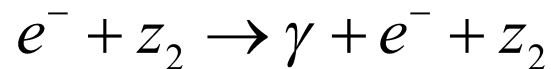
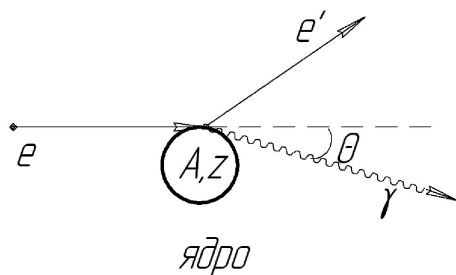
## Лекция 6

### «Тормозное излучение»

1. Интенсивность тормозного излучения
2. Запрет тормозного излучения в вакууме
3. Рентгеновское излучение электронов
4. Условия расчета сечения тормозного излучения
5. Сечение тормозного излучения
6. График дифференциального сечения
7. Потери энергии на тормозное излучение
8. Критическая энергии
9. Тормозное излучение для тяжелых частиц

## Интенсивность тормозного излучения

При прохождении заряженной частицы ( $Z_1, m_1, T_1$ ) в электрическом поле атома ( $A_2, Z_2$ ) возникает тормозное излучение.



электрический заряд

Детальный заряд 0

Барьонный заряд z

Интенсивность излучения  $J$  пропорциональна квадрату ускорения частицы:

$$J \propto (\ddot{x})^2 \propto \left(\frac{Z_1 Z_2}{m_1}\right)^2 \propto \frac{Z_2^2}{m_1^2}$$

Вероятность излучения сильно зависит

от массы  $m$  налетающей частицы  $\omega \propto 1/m^2$

$$\frac{J_m}{J_e} \propto \left(\frac{m_e}{m}\right)^2$$

Для мюонов и протонов получим  $\frac{J_\mu}{J_e} \propto \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \propto 10^{-4}$ ;  $\frac{J_p}{J_e} \propto \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 \propto 10^{-6}$

## Запрет тормозного излучения в вакууме

Процесс тормозного излучения  $e \rightarrow e' + \gamma$  в вакууме (электрон – свободная частица) запрещен законами сохранения энергии-импульса

Напишем равенство 4-импульсов до и после реакции

$$P_e = P_{e'} + P_\gamma$$

Четырехимпульс  $P(E, i\mathbf{v})$ , где  $E$  полная энергия ( $E = T + mc^2$ ) частицы ●

$$P^2 = E^2 + (ipc)^2 = E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 \equiv inv$$

$$P_e(T_e + m_e c^2, ipc); P_\gamma = (E_\gamma, icp_\gamma)$$

Квадрат выражения  $(P_e)^2 = (P_{e'} + P_\gamma)^2$

получается в виде  $(m_e c^2)^2 = (T_{e'}^* + m_e c^2 + T_\gamma^*, i(cp_{e'}^* + cp_\gamma^*))^2$  (\*) - с.ц.и.

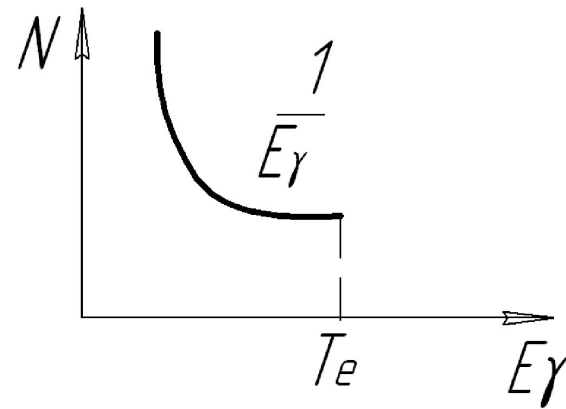
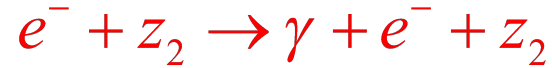
Суммарный импульс электрона и  $\gamma$ -кванта в с.ц.и равен нулю

Поэтому  $(m_e c^2)^2 = (T_{e'}^* + m_e c^2 + T_\gamma^*, 0)^2$

Величины  $T_{e'}^* \geq 0$ ,  $T_\gamma^* > 0$ , поэтому равенство не может быть выполнено

# Рентгеновское излучение электронов

Рентгеновское излучение электронов на аноде ускорительной трубки



Электроны на пути к аноду разгоняются до сотен кэВ

Поток  $\gamma$ -квантов  $N(E_{\gamma})$  имеет непрерывный энергетический спектр  $N(E_{\gamma}) \propto 1/E_{\gamma}$

Максимальная энергия  $\gamma$ -квантов может достигать значений  $E_{\gamma}^{\text{макс}} \approx e$

Незначительная энергия передается также ядру отдачи. Малость этой энергии обусловлена большой массой ядра.

## Условия расчета сечения тормозного излучения

Бете и Гайтлер рассчитали радиационные потери с учетом **конечных размеров атома**. Вероятность тормозного излучения на отдельном ядре  $Z_2$  по разному **зависит от прицельного расстояния  $\rho$** , на котором пролетает электрон мимо ядра. Для больших энергий ( $T_e \gg m_e c^2$ ) возможны два предельных случая:

- **отсутствие экранирования** поля ядра атомными электронами, взаимодействие происходит на близких расстояния ( $R_{\text{ядра}} < \rho \ll R_{\text{атом}}$ )

энергия электронов лежит в диапазоне  $m_e c^2 \ll T_e \ll (137 m_e c^2 / Z^{1/3})$

- **полное экранирование** поля ядра атомными электронами  $\rho \gg R_{\text{атом}}$

это соответствует энергии  $T_e \gg (137 m_e c^2 / Z^{1/3})$

При высокой энергии поперечная составляющая э/м поля налетающего электрона сильно вытянута и действует на экранированное ядро

Угол тормозного излучения получается равным  $\theta \approx \frac{m_e c^2}{E_e}$

Например, для  $T_e = 10$  МэВ величина  $\theta \approx \frac{m_e c^2}{\text{МэВ}} \approx \frac{0,5 \text{ МэВ}}{10} = 0,05 \text{ (рад)} \approx 3^\circ$

## Сечение тормозного излучения

Сечение тормозного излучения релятивистских электронов получено в аналитическом виде для рассмотренных выше предельных случаев

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} \approx \frac{4n_2 z_2^2 r_e^2}{E_\gamma} \cdot \begin{cases} \frac{2T_e(T_e - E_\gamma)}{m_e c^2 E_\gamma} & \text{в отсутствие экранирования } T_e = 137 m_e c^2 / Z^{1/3} - \\ \frac{183}{Z^{1/3}} & \text{полное экранирование } 137 m_e c^2 / Z^{1/3} = T_e - \end{cases}$$

$$n_2 = \frac{N_{ae}}{A_2} \rho_2 \left[ \frac{1}{\text{ам}^3} \right] \text{— концентрация атомов среды}$$

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \text{— классический радиус электрона; } \alpha = \frac{1}{137}$$

Величина сечения  $d\sigma / dE_\gamma \propto z_2^2 e^2$  пропорциональна квадрату заряда ядра

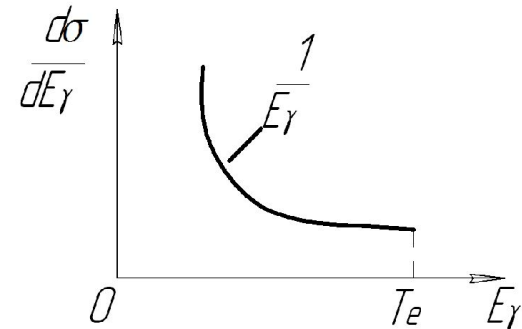
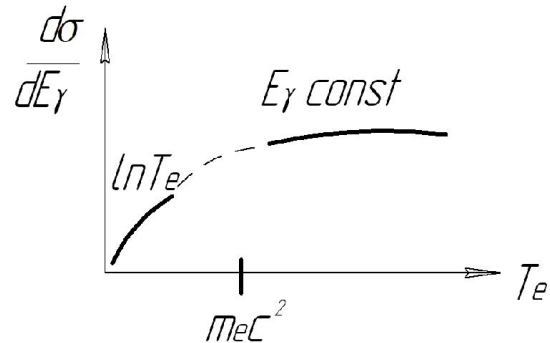
Излучение возможно также на отдельных электронах  $d\sigma / dE_\gamma \propto 1e^2$

Пересчет на все электроны атома дает вклад  $\sim z_2 e^2$

Полное сечении на один атом вещества  $d\sigma / dE_\gamma \sim z_2(z_2 + 1)$

## График дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = f(T_e, E_\gamma)$$



Слева - зависимость от энергии электрона  $T_e$  при фиксированной энергии  $E_\gamma$ .  
Справа - зависимость от энергии  $\gamma$ -кванта  $E_\gamma$  при фиксированной энергии  $T_e$ .

При энергии электрона  $T_e$  получается непрерывный поток  $\gamma$ -квантов, вплоть до энергии  $T_e$ . Это требует определенной методики в проведении активационных экспериментов в пучке  $\gamma$ -квантов, который получается при сбросе электронов ускорителя на мишень. **Монохроматических  $\gamma$ -квантов нет.** Эксперимент в области энергий  $E_{\gamma \text{ max}}$  проводится при двух близких значениях  $T_{e1}$  и  $T_{e2}$ . Разница значений после активации при этих двух энергиях и будет результатом, который относится к  $E_\gamma = (T_{e1} + T_{e2})/2$ .

## Потери энергии на тормозное излучение

Удельные потери энергии на  
тормозное излучение электронов

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{рад}} = \int_0^{T_e} E_\gamma \cdot \left(\frac{d\sigma}{dE_\gamma}\right) dE_\gamma = T_e n_2 z_2^2 r_e^2 \ln\left(\frac{183}{z_2^{1/3}}\right)$$

Выражение для радиационных потерь  
электрона можно представить в виде

$$-\frac{dE}{dx} = E \frac{1}{x_o}$$

Величина  $x_o$  - радиационная ед. длины  
для налетающего электрона

$$x_o = \frac{1}{n_2 z_2^2 r_e^2 \ln\left(\frac{183}{z_2^{1/3}}\right)} \boxtimes \frac{A_2}{\rho_2 z_2^2} \boxtimes \left(\frac{A_2}{z_2}\right) \cdot \frac{1}{\rho_2 z_2}$$

концентрация ядер  $n_2 = n_{\text{ядер}} = N_{\text{ав}} \frac{1}{A_2} \rho_2$

Параметр  $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$

Удельные радиационные потери линейно растут с энергией **налетающего электрона**. На одной радиационной единице длины (см, или г/см<sup>2</sup>) с большой вероятностью происходит излучение  $\gamma$ -кванта.



## Потеря энергии на тормозное излучение

Дифференциальная зависимость потерь  $-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{рад}} = \frac{1}{x_0}$

Закон изменения энергии налетающей частицы  $E_0$  по глубине  $x$  поглотителя  $\int_{E_0}^E \frac{dE}{E} = -\int_0^x \frac{dx}{x_0}$  или  $E(x) = E_0 e^{-x/x_0}$

На толщине одной радиационной единицы длины начальная энергия частицы  $E_0$  уменьшается в  $e$  раз  $E(x = x_0) = E_0 / e$

Зависимость  $x_0^e$  вещества мишени в основном определяется выражением  $x_0 \propto \frac{A_2}{\rho_2 Z_2^2} = \frac{A_2}{Z_2} \cdot \frac{1}{\rho_2 Z_2}$

Пересчет рад. ед. длины  $x_0 (\text{см}^2) / \varphi (\text{см}^3) = \text{см} \left( \frac{1}{Z_2} \right)$

Пересчет рад. ед. длины для частицы с массой  $m$   $x_0^{m_1} = x_0^e \cdot (m_1 / m_e)^2$

Для тяжелого протона это соотношение равно  $x_0^p \approx 4 \cdot 10^6 x_0^e$

## Критическая энергия

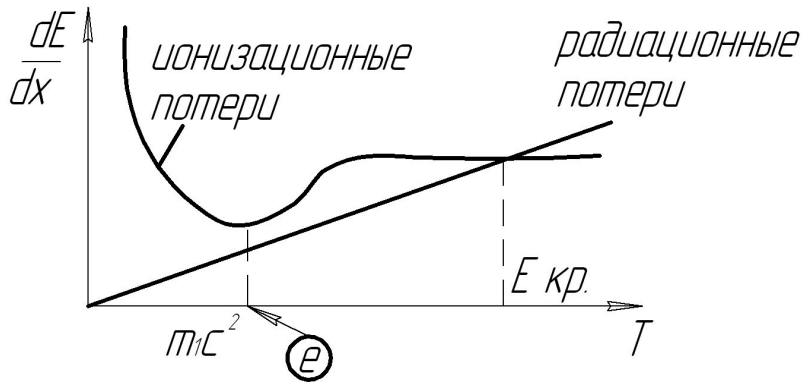


График удельных ионизационных и радиационного потерь энергии.

Точка пересечения дает значение критической энергии  $T_e \approx E = E_{кр}$

**Зависимость от параметров частицы и характеристик среды**

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}} \propto \frac{z_1^2 n_2}{m_e V_1^2} z_2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{рад}} \propto E z_2^2 n_2;$$

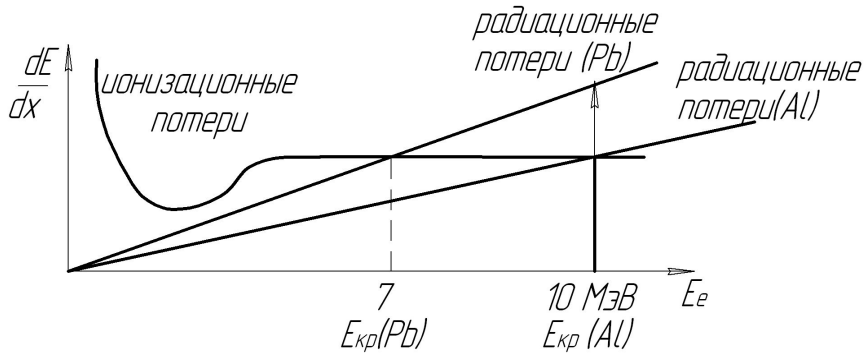
**Для электрона (с учетом  $Z=1$  и  $V \approx c$ )**  $E_{кр} \approx \frac{\text{const}}{z_2}$  численно  $M_{кр} \approx \frac{600}{z_2}$  ( )

**Например, для свинца**  $E_{кр} \approx 7 M_{эВ}$  **для алюминия**  $M_{кр} \approx 46$

**Чем легче вещество, тем больше значение критической энергии.**

**Величина  $E_{кр}$  является граничной энергией, начиная с которой превалирует тормозное излучение по сравнению с ионизационными потерями.**

## Тормозное излучение для тяжелых частиц



Учитывая зависимость  $d\sigma / dE_\gamma \propto 1/m_1^2$   
 для частицы  $m_1$   $E_{кр}^{m_1} \approx E_{кр}^e \cdot (m_1 / m_e)^2$   
 Для  $\pi$  – мезона и  $p$  получаем

$$E_{кр}^\pi \approx 10^5 \cdot E_{кр}^e \quad 4 \quad 10 E_{кр}^p \approx \cdot \quad 6 \cdot E_{кр}^e$$

Тормозное излучение отличается от процесса ионизационных потерь. Сброс энергии на излучение может происходить большими порциями. Это следует из спектра потерь:

$$\frac{dE}{dx}_{рад} \propto \int E_\gamma \cdot \frac{d\sigma}{dE_\gamma} \cdot dE_\gamma \propto \int E_\gamma \cdot \frac{1}{E_\gamma} \cdot dE_\gamma \propto const \int_{E_{\gamma 1}}^{E_{\gamma 2}} dE_\gamma \propto \Delta E_\gamma$$

В любой части энергетического спектра излучения одинаковая доля потерянной энергии равновероятна. Сброс энергии может происходить большими порциями за малое число взаимодействий.

Тормозное излучение наиболее характерно для электронов, другие частицы практически не участвуют в этом процессе.