



**Томский политехнический университет**

**Ст. преп., к.ф.м.н.**

**Богданов Олег Викторович**

**2010**



# Обыкновенные дифференциальные уравнения

**Обыкновенным дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной  $x$ , неизвестной функции  $y = f(x)$  и её производных (или дифференциалов):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

**Порядком** уравнения называется максимальный порядок  $n$  входящей в него производной (или дифференциала).

Функция  $y(x)$  называется **решением (или интегралом)** дифференциального уравнения если при подстановке ее в уравнение обращает его в **тождество**.

Пример:  $y^{(4)} - y + x = 0$  - уравнение четвёртого порядка.



# ОДУ первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

где  $x$  - независимая переменная,  $y(x)$  - неизвестная функция

Общее решение:  $y = \varphi(x, C)$

**Пример:**  $y'(x) - 3 \cdot x = 0$  общее решение:  $y(x) = \frac{3}{2}x^2 + c$

Разделяют несколько типов (видов) обыкновенных дифференциальных уравнений:

- **Уравнения с разделяющимися переменными,**
- **Однородные уравнения,**
- **Линейные уравнения,**
- **Уравнение в полных дифференциалах,**
- и т.д.

Остановимся подробнее на каждом из этих типов уравнений.

## Уравнения с разделёнными переменными.

Так называются уравнения вида удовлетворяющее начальному условию

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

Интегрируя, получим

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$$

- общий интеграл (общее решение) этого уравнения.

Пример:



$$e^y dy - (x^3 + 7x) dx = 0; \quad \int e^y dy - \int (x^3 + 7x) dx = 0;$$

$$e^y - \frac{x^4}{4} + \frac{7}{2}x^2 + c = 0 \quad - \text{общее решение}$$

## Уравнения с разделяющимися переменными.

Так называются уравнения вида

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными:

Записываем уравнение в форме:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

затем делим на  $g(y)$  и умножаем на  $d$ .  $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$  .

Это уравнение - с разделёнными переменными. Интегрируя, получим общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Пример:

$$y' = x \cdot (y - 1);$$



$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y - 1); \quad \frac{dy}{(y - 1)} = x \cdot dx;$$

$$\int \frac{dy}{(y - 1)} = \int x \cdot dx; \quad \ln |y - 1| = \frac{x^2}{2} + C$$

Выразим  $y$  из последнего выражения как функцию  $x$ , получим общее решение:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

Уравнения с **однородной** правой частью. Так называются уравнения со специальным видом зависимости функции  $f(x, y)$  от своих аргументов:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции  $u(x)$  **заменой**:

$$\frac{y(x)}{x} = u(x)$$

Подставляя в уравнение  $y = x \cdot u$ ,  $y' = u + x \cdot u'$ , получим

$$u + xu' = f(u), \quad x \frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

(это - уравнение с разделяющимися переменными),

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

- это общий интеграл уравнения относительно переменных  $x$ ,  $u$



Пример:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2},$$



$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \quad u = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad y' = u + u'x,$$

$$u + u'x = u + \frac{1}{u}, \quad x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}, \quad u du = \frac{dx}{x},$$

$$\int u du = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{u^2}{2} = \ln |x| + \frac{C}{2}, \quad u^2 = 2 \ln |x| + C, \quad \frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + C,$$

$$y^2 = x^2 (C + \ln x^2)$$

- общее решение уравнения

Пример:

$$xy' = y \cos(\ln y - \ln x)$$

$$y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}$$

$$u = \frac{y}{x}, y = ux,$$



$$y' = u + u'x, u + u'x = u \cos \ln u, x \frac{du}{dx} = u \cos \ln u - u, \frac{du}{u(\cos \ln u - 1)} = \frac{dx}{x}, \int \frac{du}{u(\cos \ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u(\cos \ln u - 1)} = |s = \ln u| = \int \frac{ds}{\cos s - 1} = \left| p = \operatorname{tg} \frac{s}{2} \right| = \int \frac{2dp/(1+p^2)}{\frac{1-p^2}{1+p^2} - 1} = \int \frac{2dp}{-2p^2} = \frac{1}{p} = \operatorname{ctg} \frac{s}{2} + C = \operatorname{ctg} \frac{\ln u}{2} + C,$$

$C \neq 0$

$$\operatorname{ctg} \frac{\ln u}{2} = \ln |x| + \ln |C|$$

$$Cx = e^{\operatorname{ctg} \frac{\ln u}{2}}$$

$$Cx = e^{\operatorname{ctg} \frac{\ln(y/x)}{2}}$$

Окончательно, получим общее решение:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

**Линейные уравнения.** ДУ первого порядка называется линейным, если неизвестная функция  $y(x)$  и её производная входят в уравнение в первой степени:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

здесь  $p(x)$ ,  $q(x)$  - непрерывные функции.

**Пример:**



$$\frac{dy}{dx} - \sin(x)y = \operatorname{ctg}(x);$$

$$y' + (1 + x^2)y = 37 \cdot x + 5.$$

Для решения уравнения представим  $y(x)$  в виде произведения двух новых неизвестных функций  $u(x)$  и  $v(x)$ :  $y(x) = u(x)v(x)$ .

Тогда

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

и уравнение приводится к виду:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

или

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

Это уравнение решаем в два этапа: сначала находим функцию  $v(x)$  как частное решение уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x)v = 0$$

затем находим  $u(x)$  из уравнения:

$$u'v = q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln |v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}$$

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot u'(x) = q(x) \Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left( \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$

Отметим, решая уравнение на  $v(x)$  мы **не вводим** в это решение произвольную **постоянную C**, нам достаточно найти одну функцию  $v(x)$ , обнуляющую слагаемое со скобками. Запоминать эту формулу не надо, лучше **усвоить порядок действий** и воспроизводить его при решении каждой задачи.

Пример:

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1$$



Решение:

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \frac{1}{\cos x},$$

$$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v, \quad v' - v \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad \ln |v| = -\ln |\cos x|,$$

$$v = \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}, \quad u(x) = x + C$$

и общее решение уравнения

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x}$$

Для нахождения частного решения, соответствующего начальным условиям (задача Коши), подставим в общее решение

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x} \quad x = 0, y = 1: 1 = \frac{0 + C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1$$

Решение задачи:

$$y(x) = \frac{x + 1}{\cos x}$$

Уравнение в полных дифференциалах. Так называется уравнение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

( $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  - непрерывно дифференцируемы) в случае, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ , т.е. если существует такая функция  $u(x, y)$ , что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Необходимым и достаточным условием существования такой функции является условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Если - уравнение в полных дифференциалах, то его правая часть равна 0, т.е. принимает вид  $du(x, y) = 0$ . На решении  $y(x)$  получим  $du(x, y(x)) = 0$ , следовательно,  $u(x, y(x)) = C$ , где  $C$  - произвольная постоянная. Соотношение  $u(x, y) = C$  и есть **общее решение уравнения в полных дифференциалах.**



Для нахождения функции  $u(x, y)$  решается **система уравнений**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим:

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y)$$

с точностью до произвольной дифференцируемой по  $y$  функции (эта функция  $\varphi(y)$ ) играет роль постоянной интегрирования; так как интегрирование ведётся по переменной  $x$ .

**Дифференцируем эту функцию по  $y$**  и приравниваем выражению, стоящему **во втором уравнении системы** (т.е.  $Q(x, y)$ ), получим дифференциальное уравнение из которого можно найти  $\varphi(y)$  .

**Пример:** найти общее решение уравнения

$$\left( \frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left( y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0$$



Убедимся, что это - **уравнение в полных дифференциалах.**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}. \end{cases}$$

$$P(x, y) = \frac{\sin 2x}{y} + x; \quad Q(x, y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\sin 2x}{y^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2 \sin x \cos x}{y^2} = -\frac{\sin 2x}{y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$u(x, y) = \int \left( \frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \varphi(y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos 2x}{2y^2} + \varphi'(y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = y - \frac{1}{2y^2} \Rightarrow$$

$$\varphi(y) = \int \left( y - \frac{1}{2y^2} \right) dy = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}$$

$$u(x, y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}$$

$$-\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} = C$$

**Задание:** К какому типу относятся дифференциальные уравнения:

1)  $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0;$

2)  $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0;$

3)  $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0.$



$$1) (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0;$$

$$\frac{1}{xy} \times (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0; \quad \left(\frac{x}{y} + 2\right) dx + dy = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y} + 2\right)$$

$$2) x(y^2 - 4)dx + ydy = 0;$$

$$xdx = -y \frac{dy}{(y^2 - 4)}; \quad \int xdx = -\int y \frac{dy}{(y^2 - 4)};$$

$$3) ye^x dx + (y + e^x)dy = 0.$$

$$P(x, y) = ye^x; \quad Q(x, y) = (y + e^x); \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = e^x; \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = e^x$$



# ОДУ высших порядков

**Обыкновенным дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной  $x$ , неизвестной функции  $y = f(x)$  и её производных (или дифференциалов):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Общим решением (общим интегралом) уравнения называется соотношение вида:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

## Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка.

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

решается последовательным  $n$ -кратным интегрированием.

Пример:



$$\begin{aligned} y^{(4)} = \sin x &\Rightarrow y''' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1 \Rightarrow y'' = -\int (\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow y = \sin x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4. \end{aligned}$$

Переобозначив постоянные, общее решение запишем в виде :

$$y = \sin x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Уравнение, не содержащее в явном виде неизвестную функцию и её младшие производные.

Порядок уравнения вида  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ , не содержащего функции  $y(x)$  и  $(k - 1)$  младшую производную этой функции в явном виде, может быть понижен ровно на  $k$  единиц введением новой неизвестной функции  $z(x) = y^{(k)}(x)$ . Тогда уравнение примет вид

$$F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

т.е. будет уравнением  $(n - k)$ -го порядка.

После нахождения  $z(x)$  последовательным интегрированием решается уравнение  $y^{(k)}(x) = z(x)$ .

**Пример:** Понизить порядок уравнения:



$$x^6 y''' - 2x^5 y'' = \frac{(y'')^3}{2}$$

Младшая производная, входящая в явной форме в уравнения, - вторая, поэтому делаем замену искомой функции:

$$z(x) = y''(x)$$

Тогда

$$y''' = z'$$

и уравнение примет вид

$$x^6 z' - 2x^5 z = \frac{z^3}{2}$$



Уравнение, **не содержащее в явном виде независимую переменную  $x$** .

Порядок уравнения

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

не содержащего явно  $x$ , может быть понижен на 1 с помощью приёма, который заключается в том, что вводится новая функциональная зависимость  $y'$  от  $y$ :

$$y' = p(y)$$

**Пример:** Понизить порядок уравнения:



$$yy'' = y'^2 - y';$$

Переменная  $x$  явно в уравнение не входит, поэтому полагаем  $y' = p(y)$   $y'' = p'p$

тогда  $yp p' = p^2 - p$  .

Просто сократить на  $p$  это уравнение **нельзя**, так как можно **потерять** семейство  $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$

поэтому рассматриваем **два случая**:

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$$

$$p \neq 0 \Rightarrow yp' = p - 1.$$

**Спасибо за внимание**