Системы Счисления

Выполнил студент группы 04-РРТ Шамрин Константин

Содержание

1. Представление о системах счисления. Однородные позиционные системы счисления. Многочленное представление числа. Веса разрядов
2. Преобразование целых чисел из одной системы счисления в другую
3. Перевод правильных дробей и одной системы счисления в другую
4. Сложение-вычитание целых беззнаковых чисел
5. Представление знакопеременных чисел и сложение-вычитание чисел со знаком
6. Двоичное умножение
7. Двоичное деление целых чисел
8. Коды Хемминга

Представление о система счисления. Однородные позиционные системы счисления. Многочленное представление числа. Веса разрядов.

Система счисления (далее СС) *- совокупность приемов и правил для записи чисел цифровыми знаками.*

Наиболее известна десятичная СС, в которой для записи чисел используются цифры 0,1,:,9. Способов записи чисел цифровыми знаками существует бесчисленное множество. Любая предназначенная для практического применения СС должна обеспечивать:

- возможность представления любого числа в рассматриваемом диапазоне величин;
- единственность представления (каждой комбинации символов должна соответствовать одна и только одна величина);
- простоту оперирования числами;

Все системы представления чисел делятся на позиционные и непозиционные.

Запись чисел может быть представлена в виде,

$$A_{(Д)} = Д_1 + Д_2 + \ldots + Д_K = \sum_{i=1}^{k} Д_i$$

где $A_{(D)}$ - запись числа A в СС D; D_i - символ системы, образующие базу. Поэтому принципу построены непозиционные СС.

Непозиционная СС *- система, для которой значение символа не зависит от его положения в числе.*

В общем же случае системы счисления: $\boldsymbol{A_{(B)} = a_1B_1 + a_2B_2 + \ldots + a_nB_n}$. Если положить, что $B_i = q_i * B_{i-1}$, а $B_1 = 1$, то получим ***позиционную СС***. Если при этом $q_i = q$, то, очевидно, $B_i = q^i$, и система называется ***однородной позиционной***. При этом натуральное число q называют ***базисом системы,*** а цифры a_i принимают целые значения от 0 до q-1. Число А записывается так: $a_n a_{n-1} \ldots a_1$**.** После последовательности цифр иногда указывают основание той СС, в которой число записано, например число 9 в двоичной форме записывается так: $1001_{(2)}$. При q=10 мы имеем дело с привычной нам десятичной СС. На практике также используют другие СС:

q	Название	Цифры
2	двоичная	0, 1
3	троичная	0, 1, 2
8	восьмеричная	0, …., 7
16	шестнадцатиричная	0,...,9,A, ..., F

Каждая СС имеет свои правила арифметики (таблица умножения, сложения). Поэтому, производя какие-либо операции над числами, надо помнить о СС, в которой они представлены.

Если основание системы q превышает 10, то цифры, начиная с 10, при записи обозначают прописными буквами латинского: A,B,...,Z. При этом цифре 10 соответствует знак 'A', цифре 11 - знак 'B' и т.д. В таблице ниже приводятся десятичные числа от 0 до 15 и их эквивалент в различных СС:

q=10	q=2	q=16	q=10	q=2	q=16
0	0	0	8	1000	8
1	1	1	9	1001	9
2	10	2	10	1010	A
3	11	3	11	1011	B
4	100	4	12	1100	C
5	101	5	13	1101	D
6	110	6	14	1110	E
7	111	7	15	1111	F

В однородной позиционной СС число можно представить через его цифры с помощью следующего многочлена относительно q:

$$A=a_1*q^0+a_2*q^1+...+a_n*q^n \quad (1)$$

Выражение (1) формулирует правило для вычисления числа по его цифрам в

q-ичной СС. Для уменьшения количества вычислений пользуются т.н. ***схемой Горнера***. Она получается поочередным выносом q за скобки:

$$A=(...((a_n*q+a_{n-1})*q+a_{n-2})*q+...)*q+a_1$$

результат вычисления многочлена будет всегда получен в той системе счисления, в которой будут представлены цифры и основание и по правилам которой будут выполнены операции.

Преобразование целых чисел из одной системы счисления в другую.

Задача преобразования из СС с основанием q в СС с основанием r сводится к нахождению цифр b_i - коэффициентов многочлена $\boldsymbol{b_0+qb_1+q^2b_2+\ldots+q^nb_n}$ из уравнения $\boldsymbol{b_0+qb_1+q^2b_2+\ldots+q^nb_n = c_0+rc_1+r^2c_2+\ldots+r^nc_k}$, где c_0, c_1, c_2, c_k - цифры записи числа в исходной СС. Предположим, что мы можем производить арифметические действия в исходной СС. Представим число A, которое надо перевести, в виде схемы Горнера: $\boldsymbol{A=b_0+q(b_1+q(b_2+\ldots+qb_n)\ldots)}$. Видно, что при делении A на q в качестве результата получаем $\boldsymbol{b_1+q(b_2+\ldots+qb_n)\ldots}$, а в качестве остатка - младшую цифру b0 числа A в q-ичной СС. Разделив результат на основание q, получаем в остатке b1 - вторую цифру и так далее, пока в результате не получится ноль. См. примеры перевода из десятичной СС в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную СС (далее) .

Предположим теперь, что требуется перевести число A=c0+qc1+q2c2+...+qncn из q-ичной СС в СС с основанием q^m. Преобразуем многочлен: $\boldsymbol{A=(c_0+qc_1+q^2c_2+\ldots+q^{m-1}c_{m-1}) + q^m(c_m+qc_{1+m}+q^2c_{2+m}+\ldots+q^{m-1}c_{2m-1}) + q^{2m}(c_{2m}+qc_{1+2m}+q^2c_{2+2m}+\ldots+q^{m-1}c_{3m-1}) + \ldots + q^{pm}(c_{pm}+qc_{1+pm}+q^2c_{2+pm}+\ldots+q^{n-pm}c_n)}$, где p - наибольшее целое число, при котором pm<n. Мы получили запись числа A в СС с основанием qm с p цифрами, где каждая цифра получается из m цифр исходной записи по формуле:

$$\boldsymbol{b_i=c_{im}+qc_{1+im}+q^2c_{2+im}+\ldots+q^{m-1}c_{m-1+im},}$$

$$\boldsymbol{b_p=c_{pm}+qc_{1+pm}+q^2c_{2+pm}+\ldots+q^{n-pm}c_n.}$$

Примеры перевода из десятичной СС в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную СС

Двоичная СС (q=2). Переведем число 23_{10} в двоичное представление. Используя вышеизложенное правило, разделим число 23 на основание целевой СС - 2: 23/2 = 11 и 1 в остатке. Младшая цифра двоичного числа - 1. Делим 11 на 2, получаем 5 и 1 в остатке. Следующая цифра числа - тоже 1. Записываем ее слева от предыдущей цифры - 11. Далее получаем 2 и 1 в остатке, а само число - 111. Далее, 2/2 = 1 и 0 в остатке. Получилось число 0111. Последнюю единицу делим опять на 2, получаем в результате 0 (это значит, что процесс перевода закончен) и в остатке - 1. Получили число 10111. Таким образом, $23_{10}=10111_2$.

Восьмеричная СС (q=8). Переведем десятичное число 100 в восьмеричный вид:
100/8=12 и **4** в остатке
12/8=1 и **4** в остатке
1/8=0 и **1** в остатке
Получили $100_{10}=144_8$.

Шестнадцатеричная СС (q=16). Переведем десятичное число 1000 в шестнадцатеричную СС:
1000/16=62 и **8** в остатке
62/16=3 и **14** в остатке
3/16=0 и **3** в остатке
Вспомним, что цифры, большие девяти, обозначаются буквами.
Цифре 14 соответствует буква Е. Получили $1000_{10}=3E8_{16}$.

Так, чтобы перевести число из двоичной записи в восьмеричную, нужно сгруппировать его цифры по три (2^3=8). Из каждой триады получается одна восьмеричная цифра. Например, дано число 10111011_2=10.111.011. Младшая цифра восьмеричной записи будет равна 1+2*1+4*0=3. Средняя 1+1*2+1*4=7, и старшая 0+1*2=2. Получаем 273_8.

Для перевода из СС с основанием q^m в q-ичную СС каждая цифра переводится в q-ичную систему, затем эти цифры записываются по порядку, причем каждая цифра, кроме старшей, дополняется слева нулями до m разрядов. Например, переведем число $2F5_{16}$ в двоичную СС. В данном случае m=4.

Так как $2_{16}=10_2$, $F_{16}=1111_2$, $5_{16}=0101_2$, то $2F5_{16}=1011110101_2$.

Перевод правильных дробей из одной системы счисления в другую

Правильной дробью называется число, равное m/n, где m и n - натуральные числа, причем m<n. Правильную дробь A в q-ичной системе счисления можно представить в виде $A=a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+a_3q^{-3}+\ldots a_nq^{-n}$ ***(1)***. Не всегда дробь можно представить с абсолютной точностью в виде конечной записи (1), поэтом в задачах заранее указывается максимальное требуемое количество знаков после запятой n.

Очевидно, что если умножим А на q, в целой части получим старший разряд a_1, а в дробной части - сумму $a_2q^{-1}+a_3q^{-2}+\ldots a_nq^{-n+1}$. Умножая далее еще раз на q, получим следующие цифры a_i.

Если правила выполнения арифметических действий в исходной СС удобны (например, число представлено в привычной десятичной форме), то перевод в q-ичную СС сводится к нахождению цифр a_i, т.е. к последовательному умножению дроби на q и выписыванию по порядку целой части результата. После каждого умножения целая часть обнуляется и операция повторяется n раз. См. пример перевода правильной дроби из десятичной в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную СС (далее).

Если в целевой СС арифметические операции выполнять удобнее (например, требуется перевести в десятичную запись), то вычислять нужно непосредственно по формуле (1). Причем каждая из цифр a_i и веса разрядов q^i записываются в целевой СС.

Пример перевода правильной дроби из десятичной в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную СС

Двоичная СС (q=2). Переведем число 0.23_{10} в двоичное представление с абсолютной точностью. Используем вышеизложенное правило: умножим число 0.23 на основание целевой СС - 2: 0.23*2 = 0.46. Видим, что целая часть получившегося числа равна нулю. Значит и первая цифра двоичной дроби - 0. Записываем ее после запятой - 0.0. Умножаем 0.46 еще раз на 2, получаем 0.92. Следующая цифра двоичной дроби - тоже 0. Записываем ее справа от предыдущей цифры - 0.00. Далее получаем 0.92*2=1.84, а само число - 0.001. Далее, обнуляем целую часть и снова умножаем: 0.84*2=1.68. Продолжаем этот процесс:

Число	Двоичная дробь
0.68	0.0011
0.36	0.00111
0.72	0.001110
0.44	0.0011101
0.88	0.00111010
0.76	0.001110101
0.52	0.0011101011
0.04	0.00111010111
0.08	0.001110101110
0.16	0.0011101011100
0.32	0.00111010111000
0.64	0.001110101110000
0.28	0.0011101011100001
0.56	0.00111010111000010
0.12	0.001110101110000101
0.24	0.0011101011100001010
0.48	0.00111010111000010100
0.96	0.001110101110000101000
0.92	0.00(111010111000010100001)

В конце концов получим число 0.92, которое уже встречалось. Следующие вычисления с этого момента будут периодически повторяться. Повторяющаяся часть дроби (период) выделен скобками в таблице.

Таким образом, $0.23_{10}=0.00(11101011100001010001)_2$.

Восьмеричная СС (q=8). Правила перевода дроби в восьмеричное представление аналогичны правилам перевода в двоичную СС. Только умножать надо на 8, а не на 2. Перевдем десятичное число 0.1 в восьмеричный вид с точность до трех цифр после запятой:

0.1*8=0.8 - цифра **0** в результате

0.8*8=6.4 - следующая цифра результата - **6**

0.4*8=3.2 - цифра **3**

Получили 0.1_{10} » 0.063_8.

Шестнадцатиричная СС (q=16). Перевдем десятичное число 0.9 в шестадцатиричную СС с точностью до двух символов после запятой:

0.9*16=14.4 - цифра **14 (E)** в результате

0.4*16=6.4 - следующая цифра результата - **6**

Получили 0.9_{10} » $0.E6_{16}$.

Двоичное умножение

Наиболее просто операция умножения производится при применении прямого кода. В машинах она реализуется в два этапа.

1-й этап - определяется знак произведения при помощи сложения знаковых цифр по модулю 2.

2-й этап - производится перемножение модулей сомножителей, затем в случае необходимости округление полученного модуля произведения, после чего к модулю результата приписывается его знак, определенный на первом этапе.

В машинах может быть реализовано как умножение, начинающееся с младшей цифры (наиболее привычный способ), так и умножение, начинающееся со старшей цифры. При умножении вручную в первом случае частичные произведения сдвигаются влево, во втором - вправо. Оба способа покажем на примере.

Пример. Перемножить числа $X_{1пр.} = 0{,}1010$ и $X_{2пр.} = 1{,}1101$.
1-й этап - знак произведения 1+1 = 1.
2-й этап - перемножаем модули:

1-й способ

```
   0,1010
 × 0,1101
 --------
     1010
    0000
   1010
  1010
 --------
0,10000010
```

2-й способ

```
   0,1010
 × 0,1101
 --------
     1010
      1010
       0000
        1010
 ---------
 0,10000010
```

В машинах нельзя просуммировать сразу n частичных произведений, как это обычно делает человек. Любой сумматор, как правило, рассчитан на одновременное сложение только двух операндов. Поэтому частичные произведения складываются не сразу, а накапливаются в регистре. При этом полную сумму (произведение) можно получить двумя путями:

1. сдвигом множимого влево при первом способе и вправо при втором;
2. сдвигом суммы частичных произведений на каждом шаге на один разряд вправо при первом способе и влево - при втором.

Таким образом, в машинах могут быть реализованы 4 схемы умножения:

1-й вариант - умножение младшими разрядами вперед со сдвигом множимого влево (обычный школьный метод);

2-й вариант - умножение младшими разрядами вперед со сдвигом накапливаемой суммы частичных произведений вправо;

3-й вариант - умножение старшими разрядами вперед со сдвигом множимого вправо;

4-й вариант - умножение старшими разрядами вперед со сдвигом накапливаемой суммы частичных произведений влево.