

Проверка корней тригонометрического уравнения

Учитель математики
МБОУ «Тумацкая СОШ»
Сундутова К. М.

В основу метода проверки корней тригонометрического уравнения следует положить понятие периода уравнения.

Пусть дано, например, уравнение:

$$\frac{\cos 4x}{\sin 2x} = \frac{\sin 4x}{\cos 2x}$$

Легко заметить, что периодом этого уравнения может служить угол 180° .

Действительно,

$$\cos 4(x+180^\circ) = \cos (4x + 2 \cdot 360^\circ) = \cos 4x,$$

$$\sin 2(x+180^\circ) = \sin (2x + 360^\circ) = \sin 2x \text{ и т.д.}$$

Чтобы найти период тригонометрического уравнения, достаточно найти периоды каждой функции, входящей в это уравнение, а затем отыскать их наименьшее общее кратное.

Чтобы найти, пользуясь этим правилом, период вышеприведенного тригонометрического уравнения, надо рассуждать следующим образом: так как период каждой из функций $\sin 4x$ и $\cos 4x$ равен

$$\frac{360^\circ}{4}$$

$=90^\circ$, а период каждой из функций $\sin 2x$ и $\cos 2x$ есть $360^\circ/2=180^\circ$, то периодом уравнения будет наименьшее общее кратное чисел 90° и 180° , то есть

Пример. Решить уравнение:

$$\cos 2x + 3\sin x = 2 \quad (1)$$

и проверить найденные корни.

Имеем:

$$(1-2\sin^2x)+3\sin x=2,$$

$$2\sin^2x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Отсюда,

$$\sin x_1 = 1, \sin x_2 = 1/2$$

$$x_1 = 360^\circ n + 90^\circ,$$

$$x_2 = 180^\circ n + (-1)^n 30^\circ$$



Полученное множество корней бесконечно.

Чтобы проверить все корни, достаточно произвести проверку только тех из них, которые лежат в пределах одного периода уравнения. Так как периодом уравнения (1) служит угол в 360° , то проверить нужно лишь корни, которые удовлетворяют неравенству: $-180^\circ < x \leq 180^\circ$.

Если придавать n различные целые значения (положительные, отрицательные или нуль), то мы обнаружим лишь три корня, удовлетворяющие этому неравенству, а именно: 90°



После подстановки их в исходное уравнение (1) найдем, что каждый из них обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Действительно,

$$\cos 180^\circ + 3\sin 90^\circ = -1 + 3 = 2,$$

$$\cos 60^\circ + 3\sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2,$$

$$\cos 300^\circ + 3\sin 150^\circ = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$



Есть одно затруднение, с которым сталкиваются: иногда общий вид углов, правильно найденный при решении тригонометрического уравнения, не совпадает с общим видом углов, указанным в ответе к задаче. Порой возникает сомнение в правильности своего решения. Рассеять это сомнение можно только посредством доказательства, что множество всех найденных корней и множество всех корней, определяемое общим видом углов в ответе задачи, между собой



Допустим, что при решении уравнения

$$\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}$$

получены корни:

$$x_1 = 720^\circ n \pm 120^\circ,$$

$$x_2 = 360^\circ(2n+1),$$

а ответ задачи дан в другой форме:

$$x = 120^\circ(2n+1).$$



Для того, чтобы убедиться в равносильности того и другого ответа, найдем сначала период уравнения (он равен 720°), а затем отыщем в обоих случаях корни, лежащие в пределах этого периода, то есть удовлетворяющие неравенству:

$$-360^\circ < x \leq 360^\circ.$$

Легко убедиться, что такими корнями в обоих случаях будут лишь $\pm 120^\circ$ и 360° .

Совпадение корней, лежащих в пределах одного периода, вызывает на равносильность

