

# Определение машины Тьюринга



**Машина Тьюринга – абстрактный исполнитель, осуществляющий алгоритмический процесс**

Это математический объект, а не физическая машина

Предложена Аланом Тьюрингом в 1936 году



# Устройство машины Тьюринга



## 1) Внешний алфавит

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

Элемент  $a_0$  называется **пустой символ**



В этом алфавите в виде слова кодируется исходный набор данных и результат работы алгоритма

# Устройство машины Тьюринга

## 2) Внутренний алфавит

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}, \{П, Л, С\}$$



В любой момент времени машина  $M$  находится в одном из состояний  $q_0, q_1, \dots, q_m$

При этом:  $q_1$  - начальное состояние  
 $q_0$  - заключительное состояние

Символы  $\{П, Л, С\}$  – символы сдвига (вправо, влево, на месте)

# Устройство машины Тьюринга



## 3) Внешняя память (лента)

Машина имеет ленту, разбитую на ячейки, в каждую из которых может быть записана только одна буква



$a_0$	$a_2$	$a_1$	$a_5$	$a_3$	$a_0$
-------	-------	-------	-------	-------	-------

# Устройство машины Тьюринга



## 3) Внешняя память (лента)

$a_0$	$a_2$	$a_1$	$a_5$	$a_3$	$a_0$
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Пустая клетка содержит  $a_0$ .

В каждый момент времени на ленте записано конечное число непустых букв



Лента является конечной, но дополняется в любой момент ячейками слева и справа для записи новых непустых символов.

Это соответствует принципу абстракции потенциальной осуществимости

# Устройство машины Тьюринга

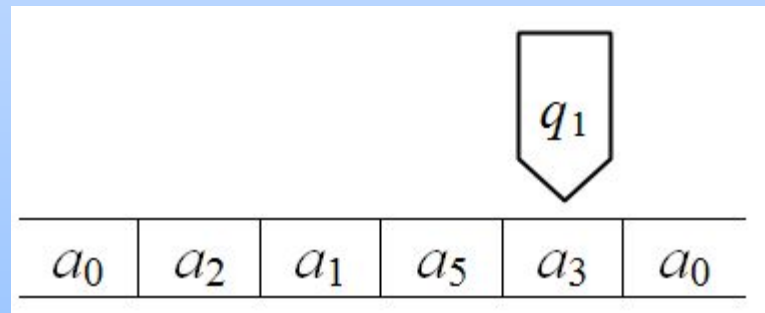


## 4) Каретка (управляющая головка)



Каретка машины располагается над некоторой ячейкой ленты – воспринимает символ, записанный в ячейке

В одном такте работы каретка сдвигается на одну ячейку (вправо, влево) или остается на месте



# Устройство машины Тьюринга



## 5) Функциональная схема (программа)



Программа машины состоит из команд:

$$\begin{aligned} q_i a_j &\rightarrow q_k a_l X, & X &\in \{П, Л, С\} \\ i &= \overline{1, m}, & j &= \overline{1, n} \\ k &= \overline{1, m}, & l &= \overline{1, n} \end{aligned}$$

Для каждой пары  $(q_i, a_j)$  программа машины должна содержать одну команду (детерминированная машина Тьюринга)





## Замечание

1) В недетерминированной машине может появиться несколько параллельных вычислительных процессов

2) Разные машины Тьюринга отличаются своими программами

Для каждого алгоритма создается своя машина Тьюринга, точнее ее программа

# Описание работы машины Тьюринга



К началу работы машины на ленту подается исходный набор данных в виде слова  $\alpha$



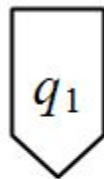
Будем говорить, что непустое слово  $\alpha$  в алфавите  $A \setminus \{a_0\}$  воспринимается машиной в **стандартном положении**, если:

- оно задано в последовательных ячейках ленты,
- все другие ячейки пусты,
- машина обозревает крайнюю правую ячейку из тех, в которых записано слово  $\alpha$

# Описание работы машины Тьюринга

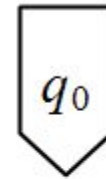


Стандартное положение называется **начальным (заключительным)**, если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии  $q_1$  (стоп-состоянии  $q_0$ )



$a_0$	$a_2$	$a_1$	$a_5$	$a_3$	$a_0$
-------	-------	-------	-------	-------	-------

начальное стандартное



$a_0$	$a_2$	$a_1$	$a_5$	$a_3$	$a_0$
-------	-------	-------	-------	-------	-------

заключительное стандартное

# Описание работы машины Тьюринга



Находясь в не заключительном состоянии, машина совершает шаг, который определяется текущим состоянием  $q_i$  и обозреваемым символом  $a_j$

# Описание работы машины Тьюринга



В соответствии с командой  $q_i a_j \rightarrow q_k a_l X$  выполняются следующие действия:



1) Содержимое обозреваемой ячейки  $a_j$  стирается и в нее записывается символ  $a_l$  (который может совпадать с  $a_j$ )

2) Машина переходит в новое состояние  $q_k$  (оно может совпадать с состоянием  $q_i$ )

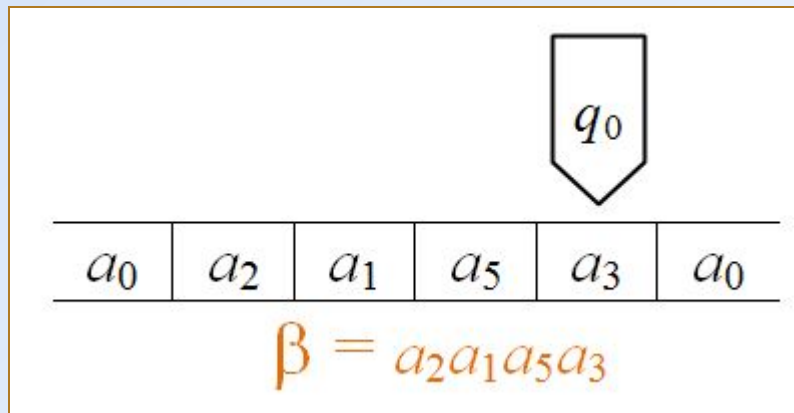
3) Каретка перемещается в соответствии с управляемым символом  $X \in \{П, Л, С\}$

# Описание работы машины Тьюринга



При переходе машины в заключительное состояние  $q_0$  ее работа прекращается

На ленте записан результат работы алгоритма – слово  $\beta$  в алфавите  $A \setminus \{a_0\}$



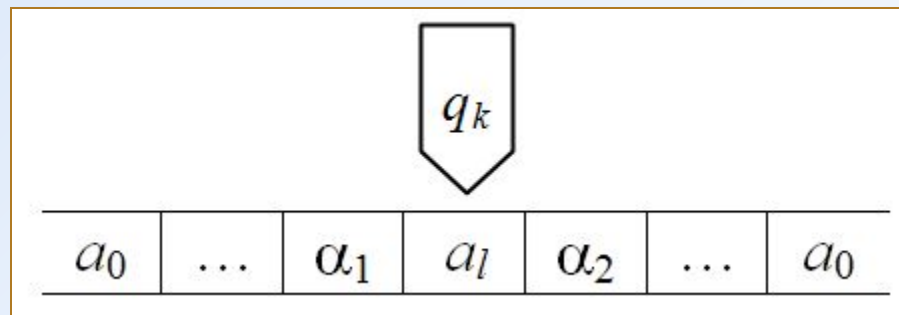


**Машинным словом (конфигурацией)** машины Тьюринга называется слово вида  $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - слова в алфавите  $A$ .



Конфигурация  $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$  интерпретируется следующим образом:

- машина находится в состоянии  $q_k$
- каретка обозревает на ленте символ  $a_l$
- $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – это содержимое ленты до и после символа  $a_l$







## Пример

Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом  $A = \{a_0, 1, * \}$ , алфавитом внутренних состояний  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ , и следующей функциональной схемой:

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2 * \text{Л}$	$q_3 * \Pi$

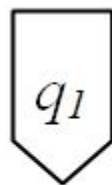
Применить машину Тьюринга к слову  $\alpha = 11^*1$ , начиная со стандартного начального положения



# Решение

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



$a_0$	1	1	*	1	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$



# Решение

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



$a_0$	1	1	*	1	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

1) Заменяем содержимое обозреваемой ячейки 1 на  $a_0$

2)

$a_0$	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	-------	-------



# Решение

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



$a_0$	1	1	*	1	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

2) Машина переходит в новое состояние  $q_2$

2)



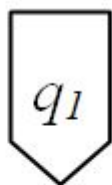
$a_0$	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	-------	-------



# Решение

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1\Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)

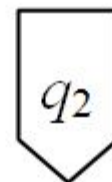


$a_0$	1	1	*	1	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

3) Каретка перемещается влево

2)



$a_0$	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	-------	-------

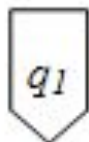


# Решение

Полное подробное решение

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



$a_0$	1	1	*	1	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

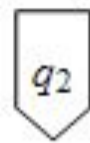
2)



$a_0$	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 * \rightarrow q_2^* \text{Л}$$

3)



$a_0$	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

4)



$a_0$	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

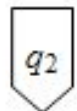


# Решение

Полное подробное решение

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \Pi$
1	$q_2 a_0 \Pi$	$q_2 1 \Pi$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \Sigma$	$q_2^* \Pi$	$q_3^* \Pi$

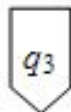
5)



$a_0$	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	-------	-------

$q_2 a_0 \rightarrow q_3 1 \Pi$

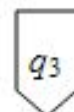
6)



$a_0$	1	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

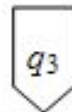
7)



$a_0$	1	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

8)



$a_0$	1	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3^* \rightarrow q_3^* \Pi$



# Решение

Полное подробное решение

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1\Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

9)

$q_3$

$a_0$	1	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------	-------

$$q_3 a_0 \rightarrow q_1 a_0 \text{Л}$$

10)

$q_1$

$a_0$	1	1	1	*	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	---	-------	-------

$$q_1 * \rightarrow q_0 a_0 \text{С}$$

11)

$q_0$

$a_0$	1	1	1	$a_0$	$a_0$	$a_0$
-------	---	---	---	-------	-------	-------

$$\underline{\beta = 111}$$





# Решение

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

Решение, записанное с помощью конфигураций  
(в строчку)

$$\begin{aligned}
 & a_0 1 1 * q_1 1 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_2 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_2 1 * a_0 \Rightarrow a_0 q_2 1 1 * a_0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a_0 q_2 a_0 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_3 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_3 1 * a_0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a_0 1 1 1 q_3 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 * q_3 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_0 a_0
 \end{aligned}$$



$$\alpha = 1^*11$$

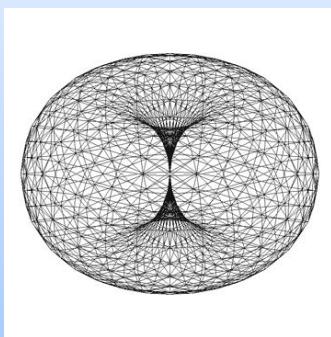
	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$a_0$		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \Pi$
1	$q_2 a_0 \Pi$	$q_2 1 \Pi$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 C$	$q_2^* \Pi$	$q_3^* \Pi$

Ответ:  $\beta = 111$



# Литература

1. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Академия, 2008. - 448 с.
2. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.  
Математическая логика. Курс лекций.  
Задачник-практикум и решения. – СПб.: Лань,  
1999. - 288 с.
3. Ильиных А.П. Теория алгоритмов. Учебное пособие. – Екатеринбург, 2006. - 149 с.



Люди могут вести себя по-разному в одинаковых ситуациях, и этим они принципиально отличаются от машин.