

## Временные ряды

*Эконометрическую модель можно построить, используя два типа исходных данных:*

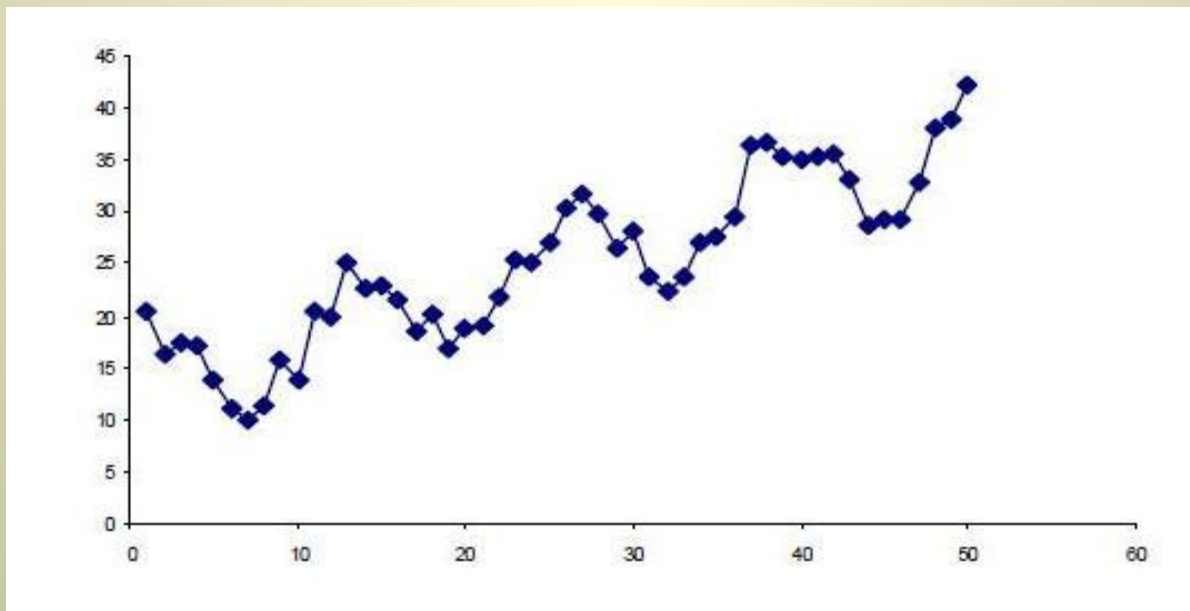
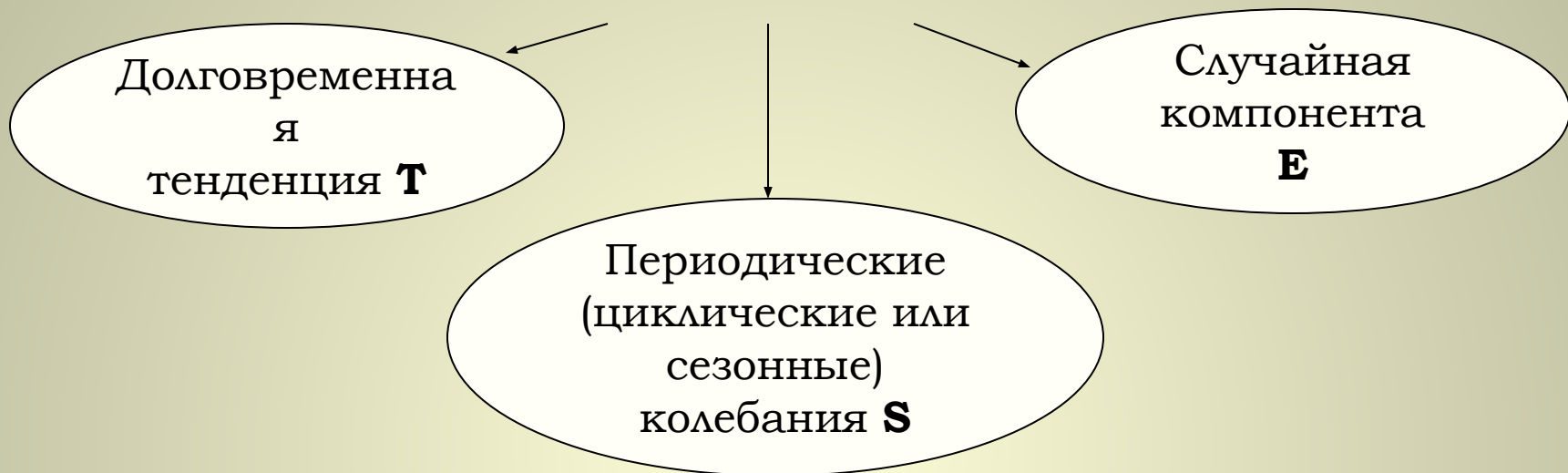
- данные, характеризующие совокупность различных объектов в определенный момент (период) времени;
- данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов (периодов) времени.

Модели, построенные по данным первого типа, называются **пространственными моделями**. Модели, построенные по данным второго типа, называются **моделями временных рядов**.

**Временной ряд (динамический ряд, ряд динамики)** – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов (периодов) времени.

	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.
ВВП, млрд. руб.	7305,6	8943,6	10834,2	13285,2	17048,1

# Три составляющие временного ряда



## Модели временного ряда:

1) аддитивная

$$Y_t = T_t + S_t + E_t$$

2) мультипликативная

$$Y_t = T_t \times S_t \times E_t$$

3) смешанная

$$Y_t = T_t \times S_t + E_t$$

### Основная задача эконометрического исследования временного ряда:

выявление и количественное выражение его компонент (тенденции, периодичности, случайной компоненты) в целях их использования для прогнозирования будущих значений ряда.

## Автокорреляция уровней временного ряда –

это корреляционная зависимость между последовательными уровнями временного ряда.

Измеряется с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями ряда, сдвинутыми на несколько шагов назад во времени:

$$r_{\tau} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^n (y_t - \bar{y}_{1\tau}) \cdot (y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})}{\sqrt{\sum_{t=\tau+1}^n (y_t - \bar{y}_{1\tau})^2 \cdot \sum_{t=\tau+1}^n (y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})^2}}$$

$$\bar{y}_{1\tau} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^n y_t}{n - \tau} \quad \bar{y}_{2\tau} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^n y_{t-\tau}}{n - \tau}$$

## $\tau$ – величина сдвига во времени, или лаг

Например, лаг  $\tau=1$  означает, что ряд сдвинут на один период (момент) назад и т.д. С увеличением лага число пар значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается.

$$\tau=1 \Rightarrow r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1) \cdot (y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}$$

$$\tau=2 \Rightarrow r_2 = \frac{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3) \cdot (y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^n (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}}$$

## Свойства коэффициента автокорреляции:

- характеризует *тесноту только линейной* связи текущего и предыдущего уровней ряда, поэтому по данному коэффициенту можно судить о наличии линейной или близкой к линейной тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию, коэффициент автокорреляции может приближаться к нулю;
- по *знаку* коэффициента автокорреляции нельзя судить о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда.

**Автокорреляционная функция временного ряда (АКФ)** – это последовательность коэффициентов автокорреляции первого, второго и т.д. порядков.

**Коррелограмма** – это график зависимости значений АКФ от величины лага.

Коррелограмма временного ряда потребления электроэнергии

Лаг (квартал)	Коэффициент автокорреляции уровней	Коррелограмма
1	0,165154	
2	0,566873	
3	0,113558	
4	0,983025	
5	0,118711	
6	0,722046	
7	0,003367	
8	0,973848	

# Моделирование тенденции временного ряда

**Аналитическое выравнивание** – это построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени, т.е. построение тренда:

- линейный тренд  $\hat{y}_t = a + bt$
- экспоненциальный тренд  $\hat{y}_t = e^{a+bt}$
- гипербола  $\hat{y}_t = a + b/t$
- тренд в форме степенной функции

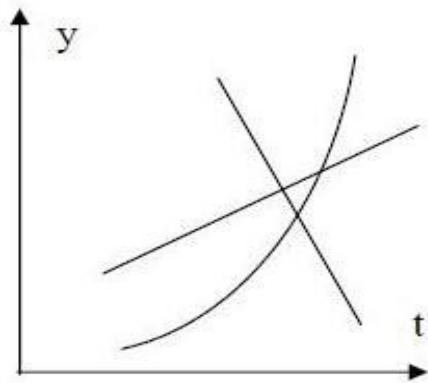
$$\hat{y}_t = a \cdot t^b$$



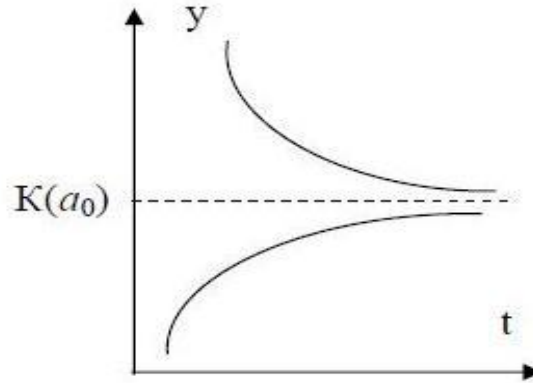
Для определения вида тенденции применяются  
следующие методы:

- качественный анализ изучаемого процесса;
- построение и визуальный анализ графика зависимости уровней ряда от времени;
- расчет и анализ показателей динамики временного ряда (абсолютные приросты, темпы роста и др.);
- метод перебора, при котором строятся тренды различного вида с последующим выбором наилучшего на основании значения скорректированного коэффициента детерминации.

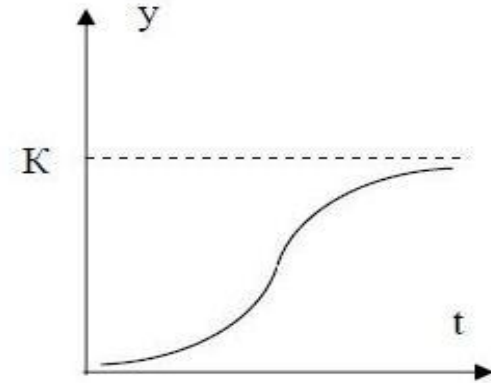
# Выбор вида тенденции на основе качественного анализа



а) I класс



б) II класс



в) III класс

Процессы с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста

## Функции:

- ✓ линейная,
- ✓ параболическая,
- ✓ экспоненциальная,
- ✓ степенная.

Процессы, имеющие предел роста (падения), так называемые процессы с «насыщением»

## Функции:

- ✓ гиперболическая,
- ✓ модифицированная экспонента.

S-образные процессы

## Функция:

- ✓ логистическая.

$$y_t = \frac{K}{1 + a_0 e^{-bt}}$$

# Моделирование периодических колебаний

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений  $T$ ,  $S$ ,  $E$  для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие этапы:

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
2. Расчет значений периодической компоненты  $S$ .
3. Устранение периодической компоненты из исходных уровней ряда и получение выравненных данных  $(T+E)$  в аддитивной или  $(T \cdot E)$  в мультипликативной модели.
4. Аналитическое выравнивание уровней ряда и расчет значений  $T$  с использованием полученного уравнения тренда.
5. Расчет полученных по модели значений  $(T+S)$  или  $(T \cdot S)$ .
6. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

# 1 этап. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней

Расчет оценок сезонной компоненты в аддитивной модели

⊕

Кварталы	Потребление эл/энергии	Итого за 4 квартала	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6=2-5</i>
1	6,0				
2	4,4	24,4	6,10		
3	5,0	25,6	6,40	6,250	-1,250
4	9,0	26,0	6,50	6,450	2,550
5	7,2	27,0	6,75	6,625	0,575
6	4,8	28,0	7,00	6,875	-2,075
7	6,0	28,8	7,20	7,100	-1,100
8	10,0	29,6	7,40	7,300	2,700
9	8,0	30,0	7,50	7,450	0,550
10	5,6	21,0	7,75	7,625	-2,025
11	6,4	32,0	8,00	7,875	-1,475
12	11,0	33,0	8,25	8,125	2,875
13	9,0	33,6	8,40	8,325	0,675
14	6,6	33,4	8,35	8,375	-1,775
15	7,0				
16	10,8				

⊖

## 2 этап. Расчет значений периодической компоненты S

Расчет значений сезонной компоненты в аддитивной модели

Показатель	Год	Кварталы			
		1	2	3	4
	1ый	-	-	-1,250	2,550
	2ой	0,575	-2,075	1,100	2,700
	3ий	0,550	-2,025	-1,475	2,875
	4ый	0,675	-1,775	-	-
Итого за $i$ -й квартал (за все годы)	$\sum$	1,800	-5,875	-3,825	8,125
Средняя оценка сезонной компоненты для $i$ -го квартала, $\bar{S}_i$	$\sum$	0,600	-1,958	-1,275	2,708
Скорректированная сезонная компонента, $S_i$	$\sum$	0,581	-1,977	-1,294	2,690

### 3 этап. Устранение периодической компоненты из исходных уровней ряда и получение выравненных данных ( $T+E$ )

Расчет выравненных значений  $T$  и  $E$  в аддитивной модели

$t$	$y$	$S$	$T+E=$ $y-S$	$T$	$T+S$	$E=$ $y-(T+S)$	$E^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	6,0	0,581	5,914	5,902	6,483	-0,483	0,2333
2	4,4	-1,977	6,337	6,088	4,111	0,289	0,0835
3	5,0	-1,294	6,294	6,275	4,981	0,019	0,0004
4	9,0	2,690	6,310	6,461	9,151	-0,151	0,0228
5	7,2	0,581	6,619	6,648	7,229	-0,029	0,0008
6	4,8	-1,977	6,777	6,834	4,857	-0,057	0,0032
7	6,0	-1,294	7,294	7,020	5,727	0,273	0,0745
8	10,0	2,690	7,310	7,207	9,896	0,104	0,0108
9	8,0	0,581	7,419	7,393	7,974	0,026	0,0007
10	5,6	-1,977	7,577	7,580	5,603	-0,030	0,0009
11	6,4	-1,294	7,694	7,766	6,472	-0,072	0,0052
12	11,0	2,690	8,310	7,952	10,642	0,358	0,1282
13	9,0	0,581	8,419	8,139	8,720	0,280	0,0784
14	6,6	-1,977	8,577	8,325	6,348	0,252	0,0635
15	7,0	-1,294	8,294	8,519	7,218	-0,218	0,0475
16	10,8	2,690	8,110	8,698	11,388	-0,588	0,3457

**4 этап. Аналитическое выравнивание уровней ряда и расчет значений  $T$  с использованием полученного уравнения тренда**

$$T = 5,715 + 0,186t$$

