

# Графы

Степень вершины

Подсчет числа ребер графа



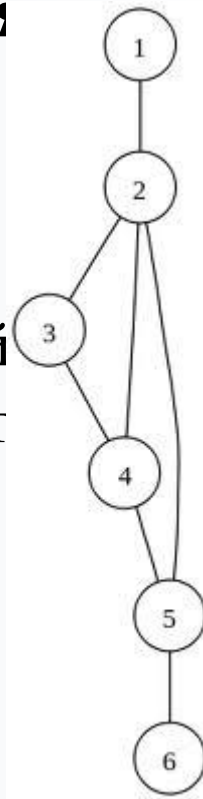
# Разминка...



**Вставьте недостающие слова в предложения**  
*(граф, титул, ребро, вершина)*

Всем известно, что слово «граф» означает дворянский           , например, граф Лев Николаевич Толстой. А вот в математике ...

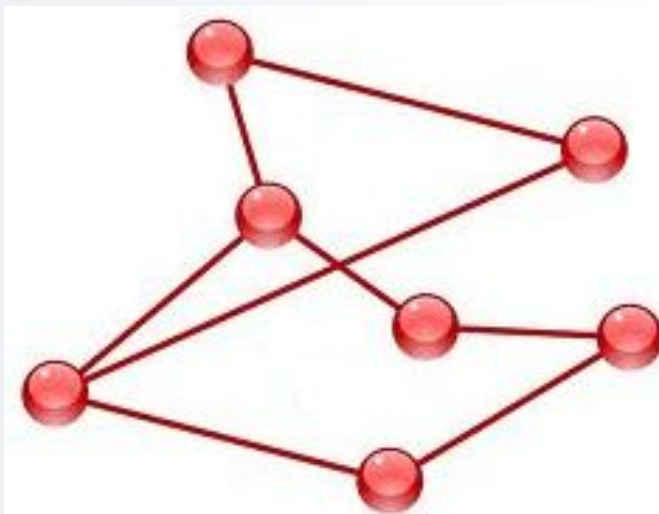
**Граф** – это конечная совокупность           ,  
некоторые из которых соединены ребрами .



## Разминка...

**Вставьте недостающие слова в предложения**  
*( мультиграф, кратный, вершина)*

Если пара вершин соединена несколькими ребрами,  
то говорят, что задан мультиграф, а ребра,  
соединяющие одну и ту же пару вершин  
называют кратными.

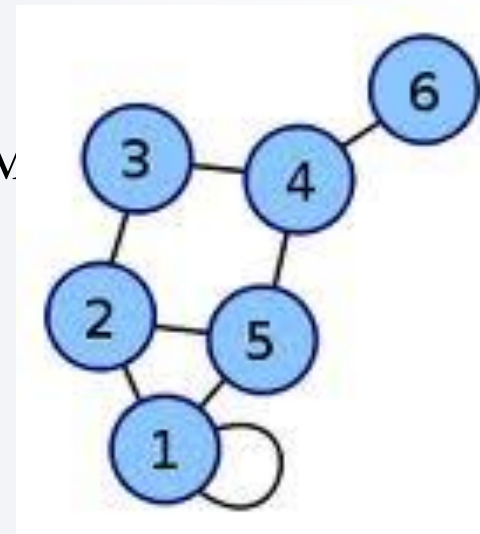


# Разминка...

**Вставьте недостающие слова в предложения**  
( смежный, петля)

Если ребро соединяет вершину саму с собой,  
то такое ребро называют           .

Если две вершины графа соединены ребром,  
то такие вершины называются           .



# Домашняя задача

## Условие



В стране Знак есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Путешественник обнаружил, что два города соединены дорогой в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3.

# Домашняя задача

## Задания



Постройте граф, обозначив вершины графа цифрами (названия городов).

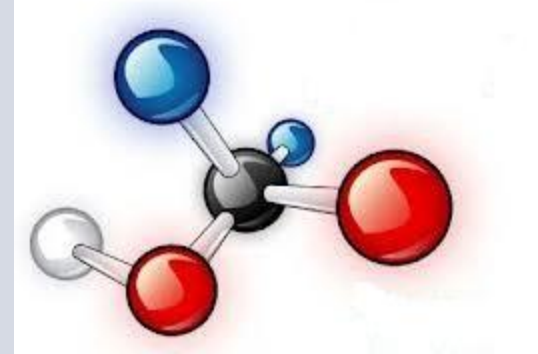
Соедините ребрами те вершины, которые удовлетворяют условию задачи.

Посчитайте количество ребер.

Можно ли долететь по воздуху из города 1 в город 9 ?

# Домашняя задача

## Решение

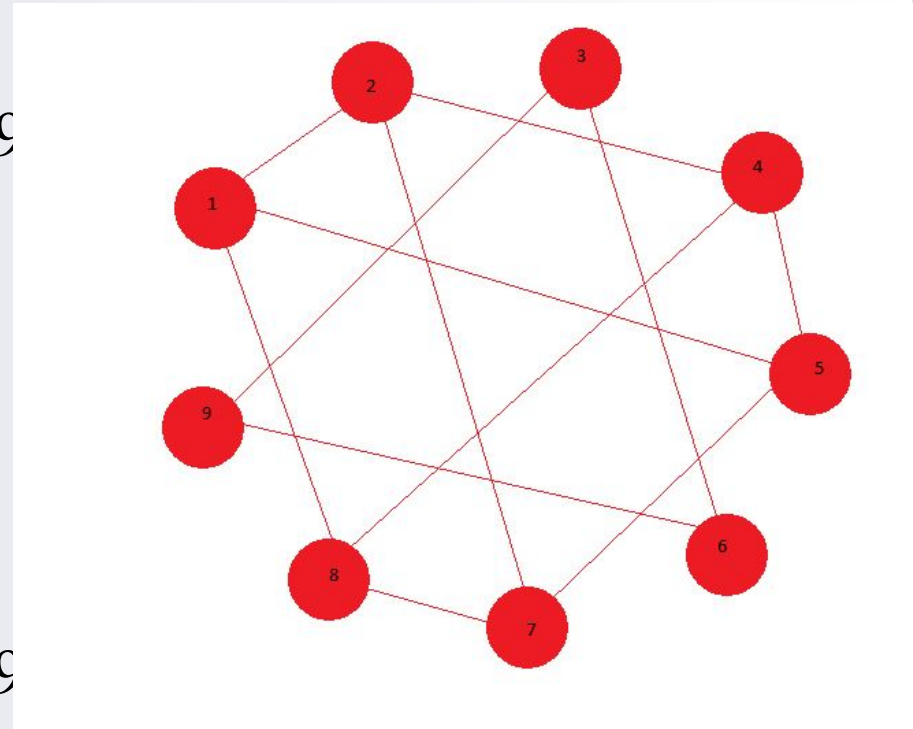


Поставим в соответствие каждому городу точку и соединим те точки линиями, сумма цифр которых делится на 3. Получим граф.

Обратим внимание, что 3, 6, 9 связаны между собой, но не связаны с остальными.

Число ребер: 12.

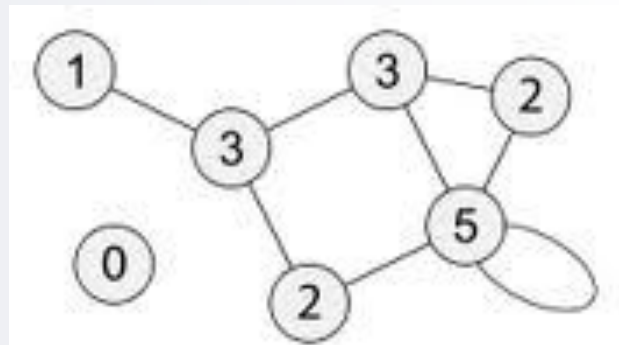
Значит  
долететь из города 1 в город 9





# Степень вершины графа

Количество ребер, выходящих из одной вершины, называют **степенью** этой вершины.



*Для петли будем считать, что это ребро выходит из вершины дважды.*

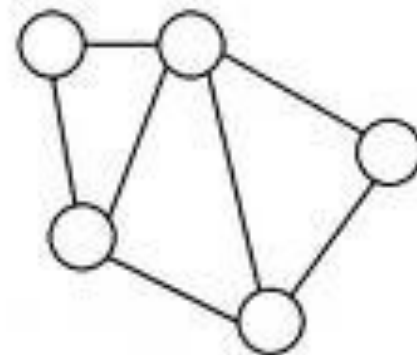


# Степень вершины графа



Вершина, имеющая четную степень, называется **четной вершиной**, соответственно, вершина, имеющая нечетную степень, называется **нечетной вершиной**.

Граф называется **связным**, если из любой его вершины в любую другую можно пройти по ребрам графа.





## Подсчет числа ребер графа

**Количество ребер графа равно половине суммы степеней его вершин.**

Пусть граф имеет  $n$  вершин, тогда число ребер равно:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$





## Подсчет числа ребер графа

*Рассмотрим утверждение о количестве ребер на примере:*

**Задача:** в государстве 100 городов, из каждого выходит 2 дороги, кроме столицы, откуда выходит 6 дорог. Сколько всего дорог в государстве?

**Решение:** сложим количества дорог, выходящих из всех городов:  $99 \cdot 2 + 6 = 204$ . Это число - количество концов всех дорог. Поскольку каждая дорога имеет 2 конца, то количество дорог будет вдвое меньше, а именно 102.



# Степень вершины графа

**Теорема.** Количество вершин нечетной степени любого графа всегда четно.

**Доказательство:** Количество ребер графа равно половине суммы степеней его вершин.

Так как количество ребер должно быть целым числом, то сумма степеней вершин должна быть четной.

А это возможно только в том случае, если граф содержит четное число нечетных вершин.

## Домашнее задание



- У короля 19 вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей ?
- Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
- Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.