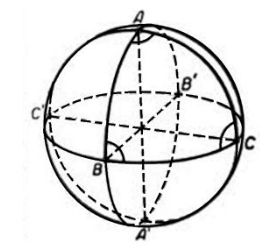
[Системы координат на плоскости и в пространстве.]

[Векторы.]

[Действия с векторами.]



[Решение задач с помощью векторов.]

[Пожелание]

Команда «Интеграл»

Системы координат на плоскости и в пространстве

- Что такое система координат?
- Рене Декарт
- Задание прямоугольной системы координат
- Вопросы
- Повторение
- Решение задач

- Вернуться на главную страницу

Системы координат на плоскости и в пространстве

Декартовы прямоугольные координаты

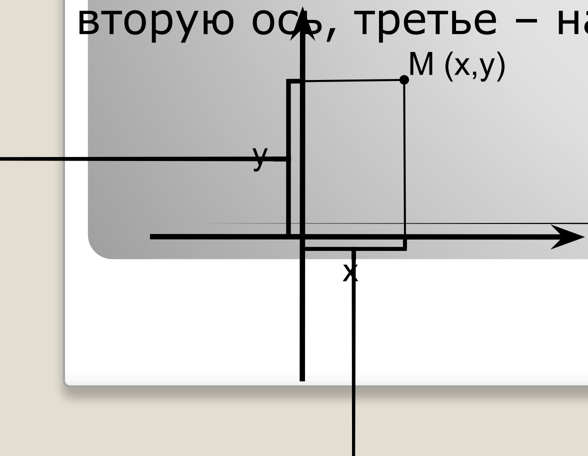
O - начало координат, *Ox* - ось абсцисс, *Oy* - ось ординат, - базисные векторы, - абсцисса точки *M* (- проекция точки *M* на ось *Ox* параллельно оси *Oy*), - ордината точки *M* (- проекция точки *M* на ось *Oy* параллельно оси *Ox*).

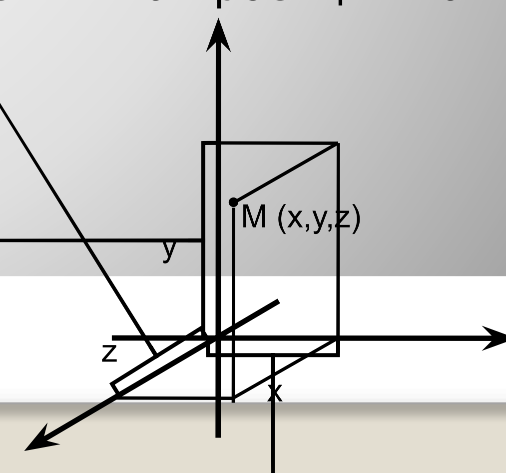
Расположение точки *M* на плоскости определяется **декартовыми координатами** с помощью пары чисел :

— расстояние от точки М до оси *y* с учетом знака

— расстояние от точки М до оси *x* с учетом знака

Декартовы координаты в пространстве задаются с помощью точки начала координат и трёх взаимно-перпендикулярных направленных прямых. Прямые занумерованы, задан единичный отрезок. Положение любой точки в пространстве однозначно определено тремя числами: первое число – величина проекции точки на первую ось, второе – величина проекции на вторую ось, третье – на третью.





<< << К разделу<< К разделу Далее<< К разделу Далее >>

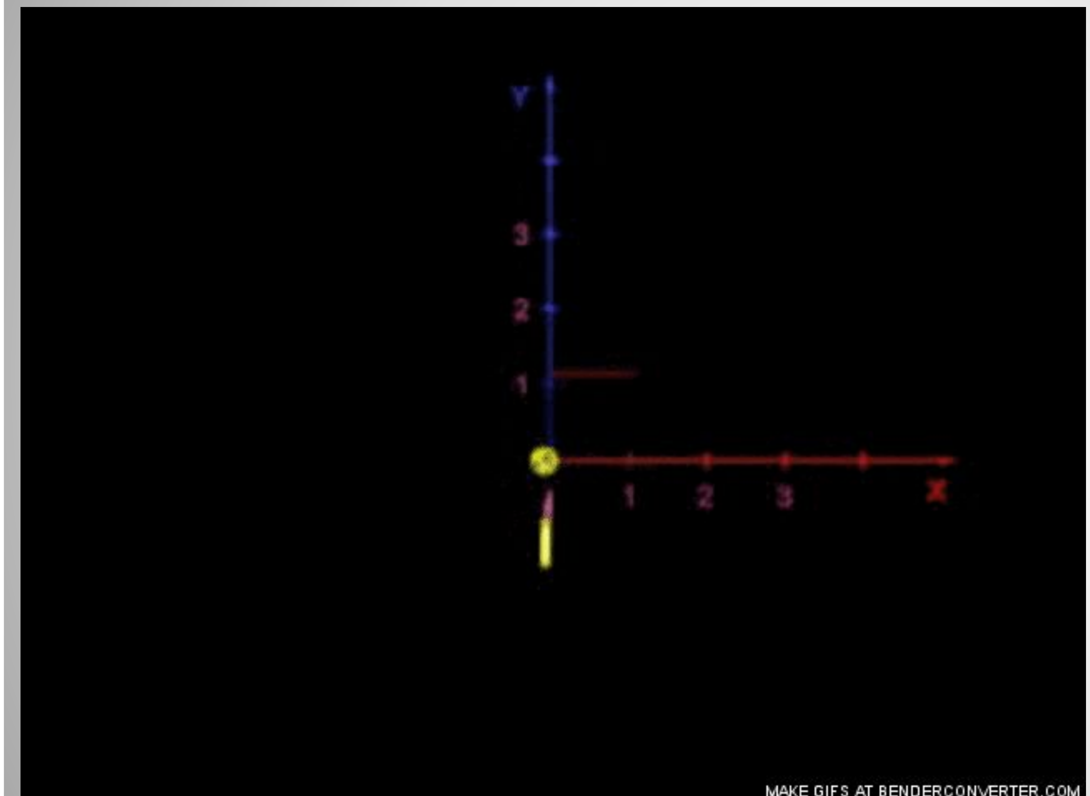
Рене Декарт

ДЕКАРТ (Descartes), Рене

31 марта 1596 г. – 11 февраля 1650 г.

Французский философ, физик, математик и физиолог Рене Декарт (латинизированное имя – Картезий; Cartesius) родился в Лаэ близ Тура в знатной, но небогатой семье. Образование получил в иезуитской школе Ла Флеш в Анжу (окончил в 1614 г.) и в университете в Пуатье (1616). У Декарта действительное число трактовалось как отношение любого отрезка к единичному, хотя сформулировал такое определение лишь И. Ньютон; отрицательные числа получили у Декарта реальное истолкование в виде направленных ординат. Декарт значительно улучшил систему обозначений, введя общепринятые знаки для переменных величин (x, y, z,...) и коэффициентов (a, b, c,...), а также обозначения степеней (x^4, a^5,...). Запись формул у Декарта почти ничем не отличается от современной.

Задание прямоугольной системы координат в пространстве:



Ox – ось абсцисс

Oy – ось ординат

Oz – ось аппликат

M (1; 1; 1)

$$Oy \perp Oz$$

$$Oz \perp Ox$$

$$Oy \perp Ox$$

<< << К разделу<< К разделу

Вопросы:

1. Сколькими координатами может быть задана точка на прямой?

Одной.

2. Сколькими координатами может быть задана точка в координатной плоскости?

Двумя.

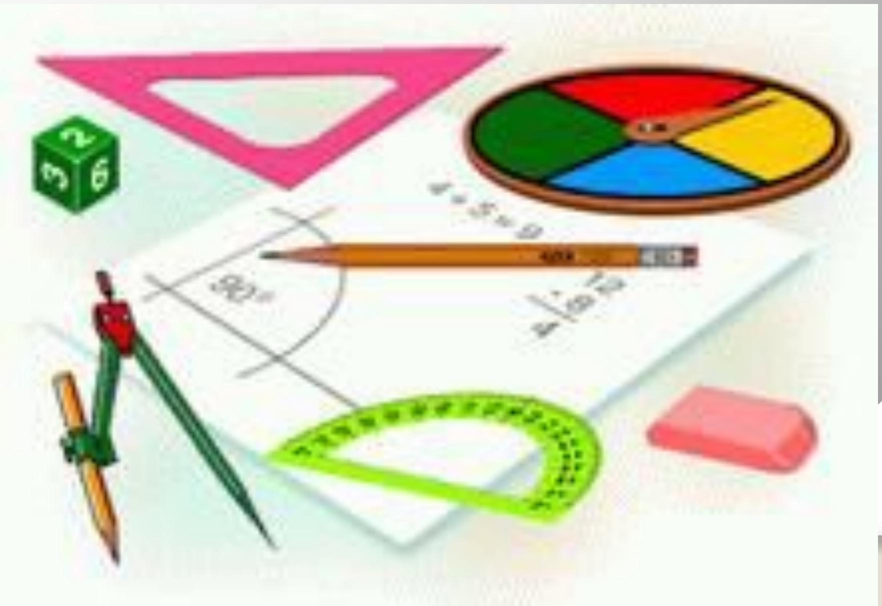
3. Сколькими координатами может быть задана точка в пространстве?

Тремя.

Выполнение задания с последующей проверкой.

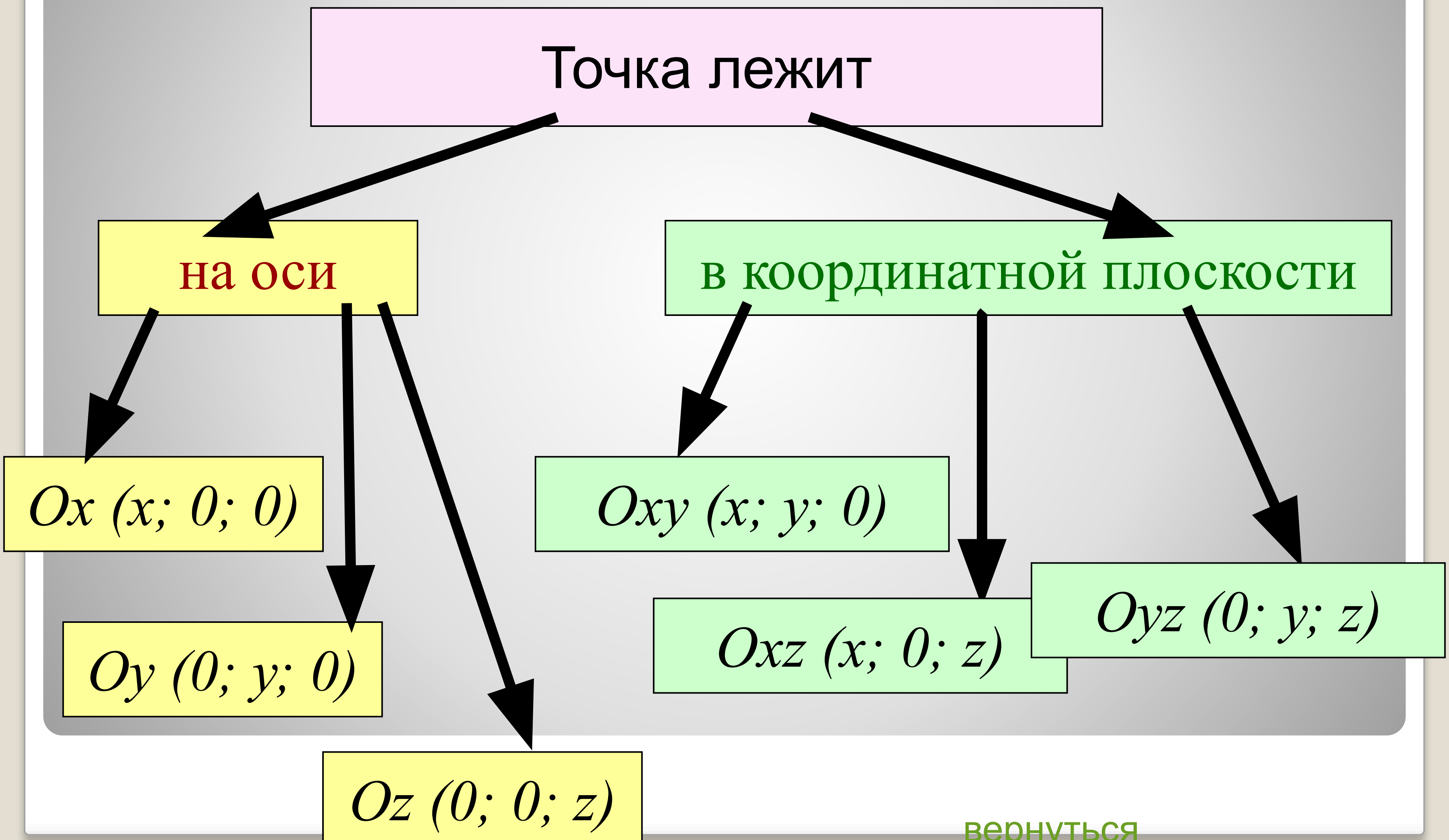
Начертить прямоугольную трехмерную систему координат и отметить в ней точки:

A (1; 4; 3); B (0; 5; -3); C (0; 0; 3) и D (4; 0; 4)



подсказка

Нахождение координат точек.



вернуться

Повторение.

Даны точки:

A (2; -1; 0)

B (0; 0; -7)

C (2; 0; 0)

D (-4; -1; 0)

E (0; -3; 0)

F (1; 2; 3)

P (0; 5; -7)

К (2; 0; -4)

Назовите точки, лежащие в плоскости Oyz.

Назовите точки, лежащие в плоскости Oxz.

B (0; 0; -7)

Назовите точки, лежащие в плоскости Oxy.

C (2; 0; 0)

E (0; -3; 0)

Решение задач.

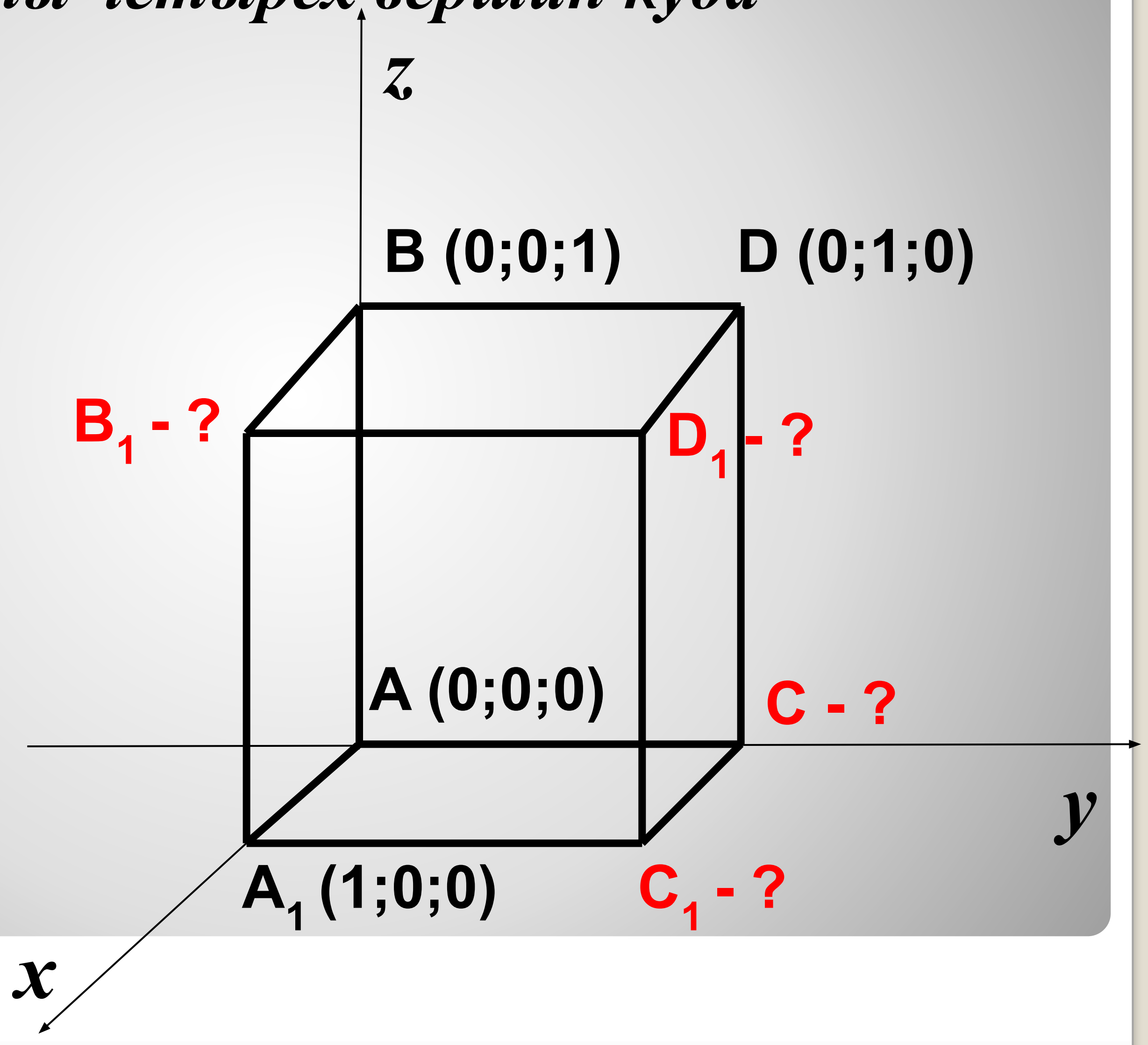
Даны координаты четырех вершин куба

B_1 (1; 0; 1)

C (0; 1; 0)

C_1 (1; 1; 0)

D_1 (1; 1; 1)



Найдите координаты остальных вершин.

На главную

Векторы

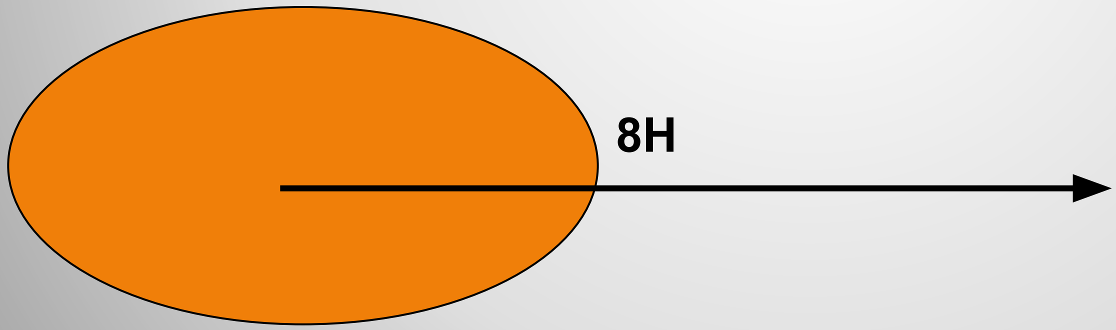
Понятие вектора
Коллинеарные векторы
Равенство векторов
Противоположные векторы

Действия с векторами

>>>>>Вернуться на главную

Понятие вектора

- *Пусть на тело действует сила в 8Н. Стрелка указывает направление силы, а длина отрезка соответствует числовому значению силы.*

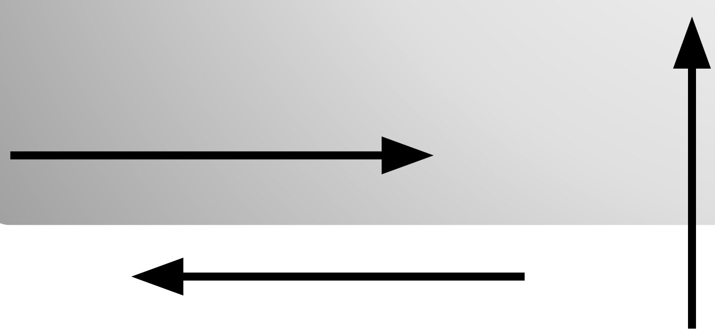


Понятие вектора

- *Рассмотрим произвольный отрезок. На нем можно указать два направления.*
  Чтобы выбрать одно из направлений, один конец отрезка назовем НАЧАЛОМ, а другой – КОНЦОМ и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.

- **Определение.**

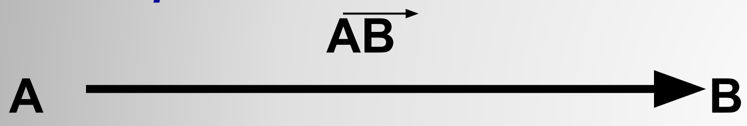
  *Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой - концом, называется направленным отрезком или **вектором.***



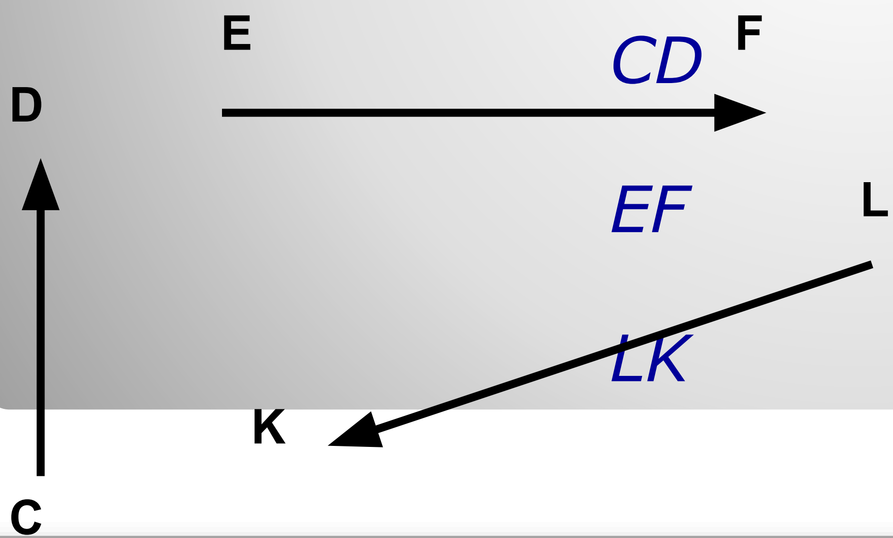
<< << К НачалуДалееДалее

Понятие вектора

- *На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой*



Вектор $\overrightarrow{AB}$, A – начало вектора, B – конец.



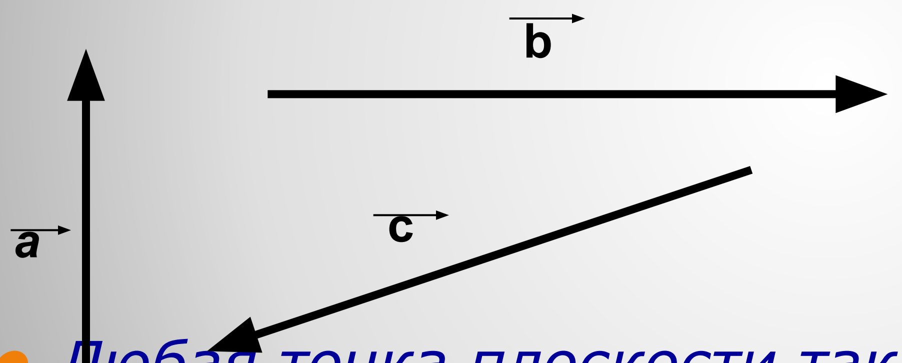
$\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{LK}$

Понятие вектора

- *Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней:*



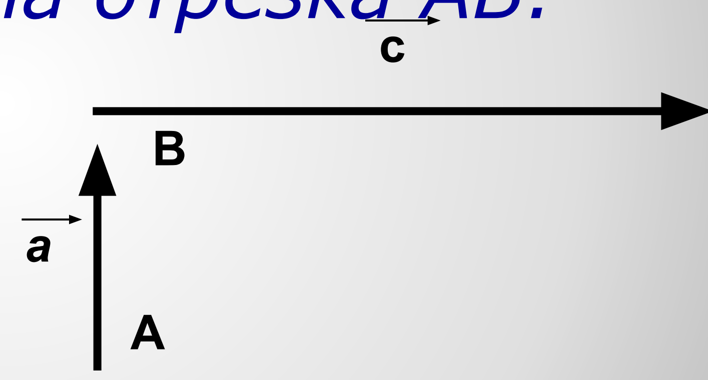
- *Любая точка плоскости также является вектором, который называется* *НУЛЕВЫМ.* *Начало нулевого вектора совпадает с его концом:*

$\overrightarrow{MM} = \vec{0}.$

Понятие вектора

- *Длиной или модулем ненулевого вектора $\vec{AB}$ называется длина отрезка AB:*

$$|\vec{AB}| = |\vec{a}| = AB = 5$$



$$|\vec{c}| = 17$$

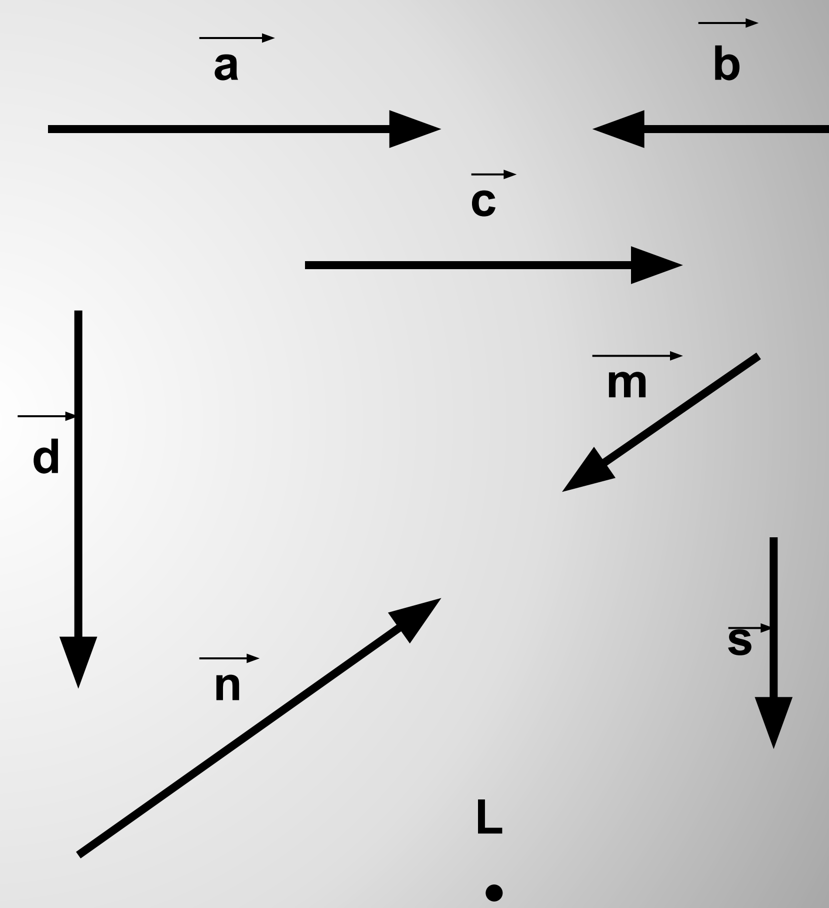
- *Длина нулевого вектора считается равной нулю:*

$$|\vec{MM}| = 0.$$

<< << К Началу Далее Далее

Коллинеарные векторы

- Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Коллинеарные векторы могут быть **сонаправленными** или **противоположно направленными**.
- Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.



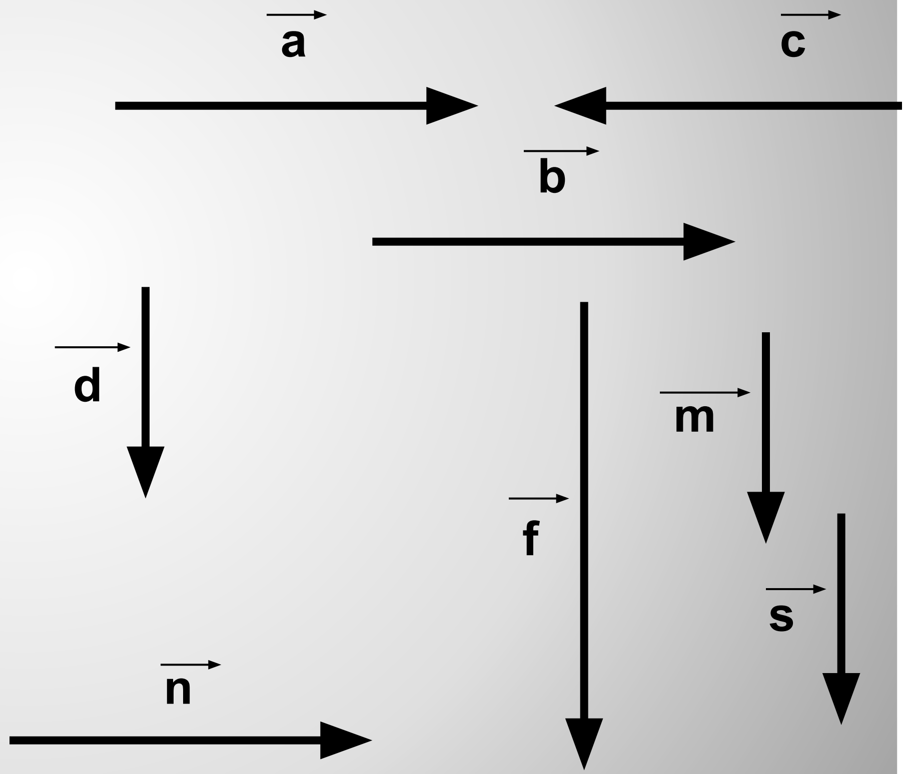
Равенство векторов

- Определение. Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

$\vec{a} = \vec{b}$, если

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

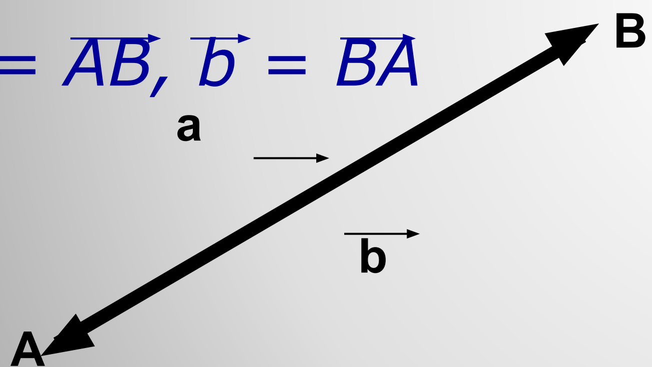


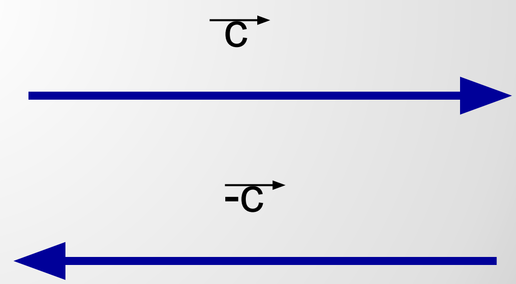
Противоположные векторы

Пусть $\vec{a}$ – произвольный ненулевой вектор.

Определение. Вектор $\vec{b}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют равные длины и противоположно направлены.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$





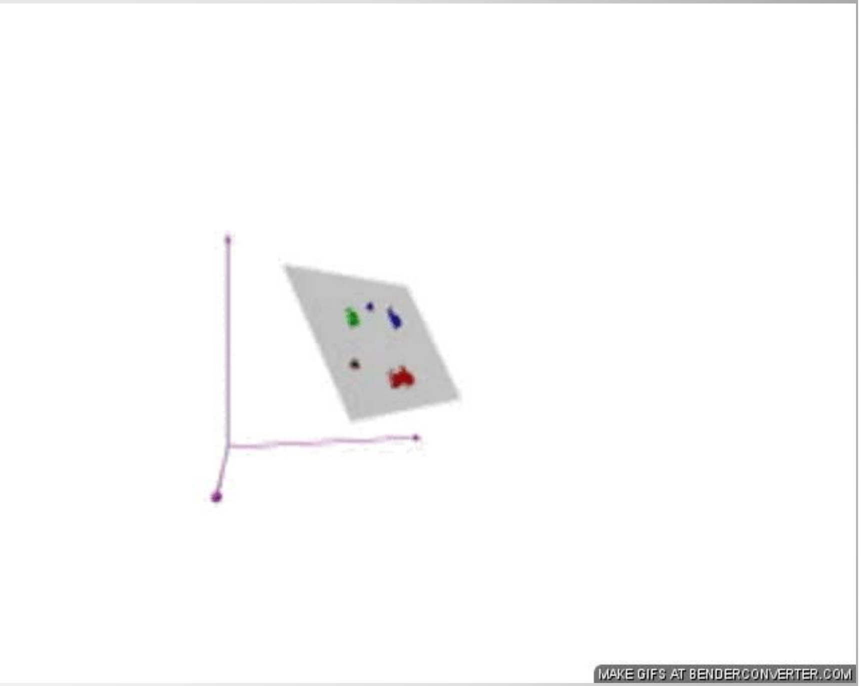
Вектор, противоположный вектору $\vec{c}$, обозначается так: $-\vec{c}$.

Очевидно, $\vec{c}+(-\vec{c})=\vec{0}$ или $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

<< << К Началу

Действия с векторами

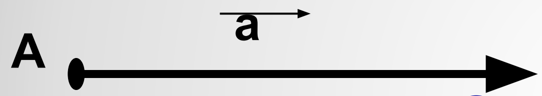
- [Откладывание вектора от данной точки]
- [Сумма двух векторов]
- [Законы сложения]
- [Сумма нескольких векторов]
- [Вычитание векторов]
- [Умножение вектора на число]
- [Способы задания вектора]
- [Правила действия над векторами с заданными координатами]
- [Скалярное произведение]



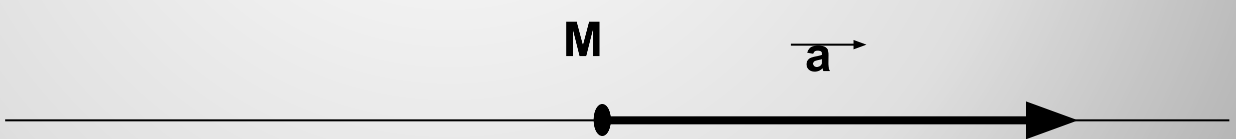
>>>>Вернуться на главную страницу

Откладывание вектора от данной точки

- Если точка ***A*** – начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки ***A***.



- **Утверждение:** От любой точки ***M*** можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.



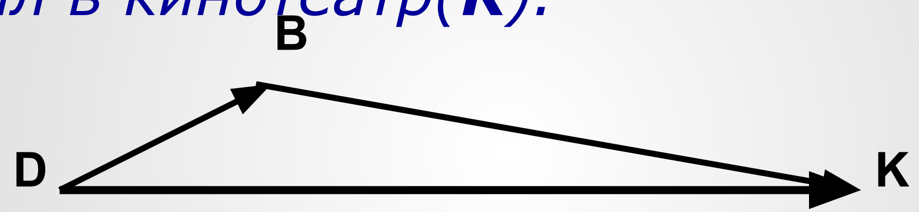
Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой

<<<< Вернуться

Сумма двух векторов

- Рассмотрим пример:

*Петя из дома(**D**) зашел к Васе(**B**), а потом поехал в кинотеатр(**К**).*



В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{BK}$, Петя переместился из точки D в К, т.е. на вектор $\overrightarrow{DK}$:

$$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BK}.$$

Вектор $\overrightarrow{DK}$ называется суммой векторов $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{BK}$.

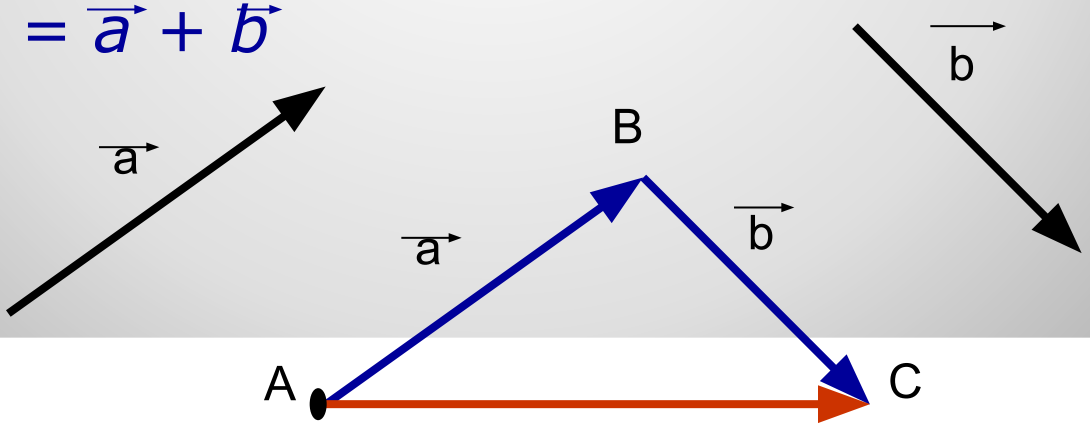
<<<< Вернуться ДалееДалее

Сумма двух векторов

Правило треугольника

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$



Законы сложения векторов

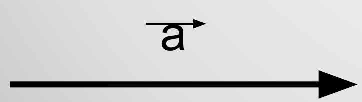
1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон)

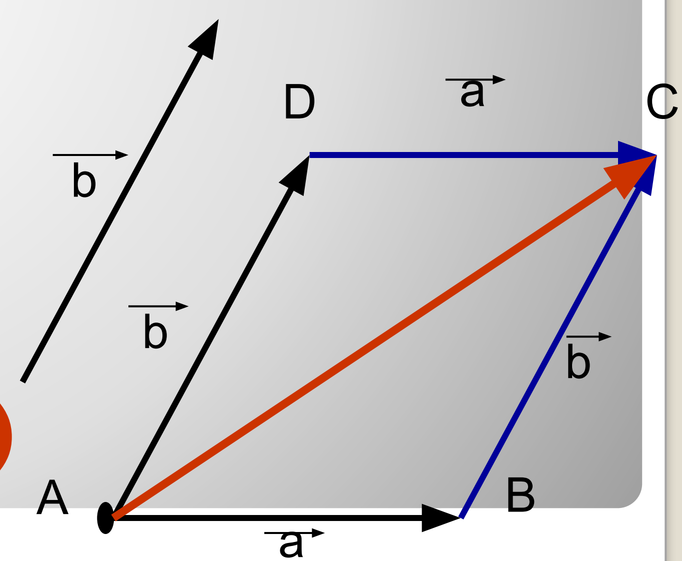
Правило параллелограмма

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки $\vec{AB} = \vec{a}$, затем вектор $\vec{AD} = \vec{b}$. На этих векторах построим параллелограмм ABCD.

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a}+\vec{b}$

$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{b}+\vec{a}$





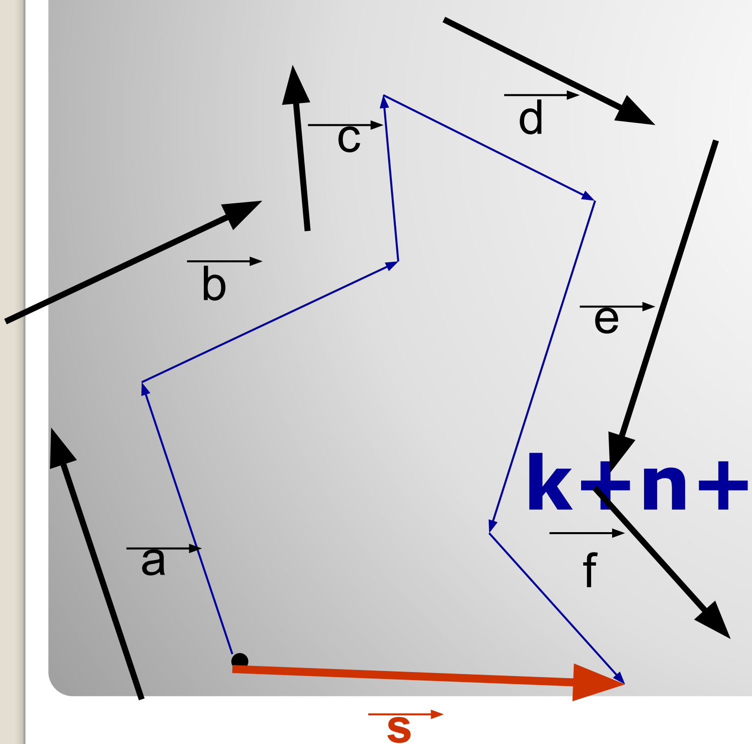
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный закон)

<<<< Вернуться

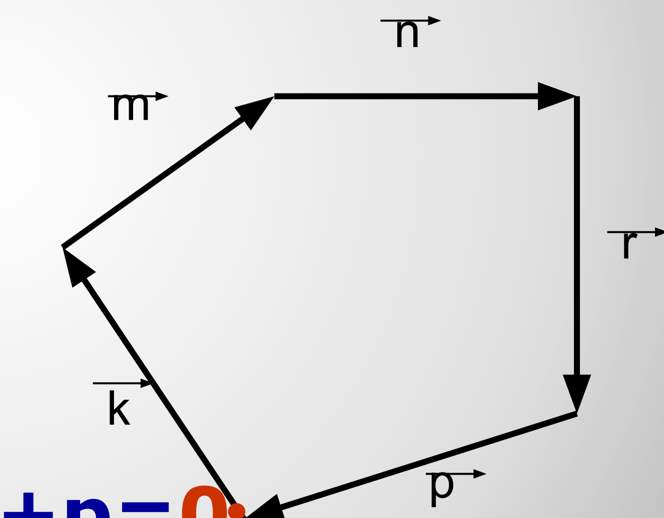
Сумма нескольких векторов

Правило многоугольника

$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}$



k+n+m+r+p=0



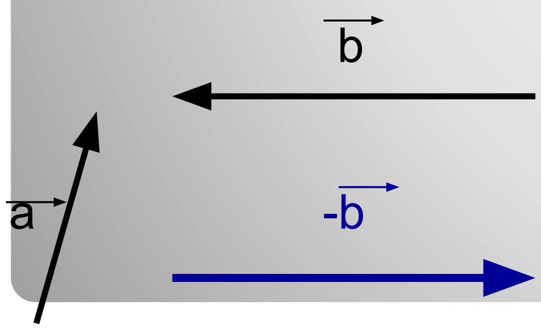
<<<< Вернуться

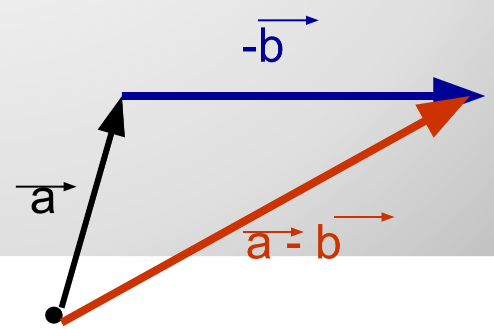
Вычитание векторов

Определение. *Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.*

Теорема. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.*

Задача. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

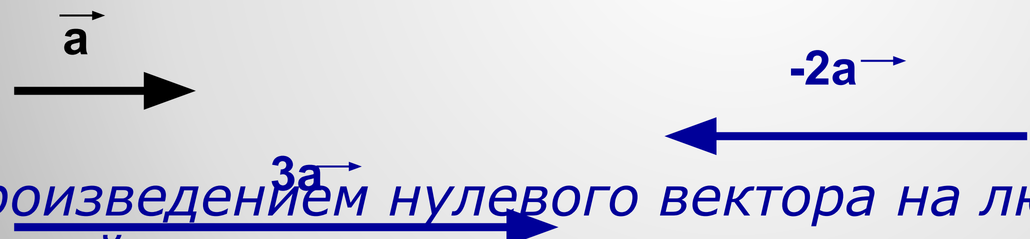




<<<< Вернуться

Умножение вектора на число

Определение. *Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна вектору k $\vec{a}$, причем векторы $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k<0$.*



Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.

<< Вернуться Далее

Умножение вектора на число

Для любых чисел k, n и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1) $(kn)\vec{a} = k(n\vec{a})$ *(сочетательный закон)*
2) $(k+n)\vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$ *(первый распределительный закон)*
3) $K(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ *(второй распределительный закон)*

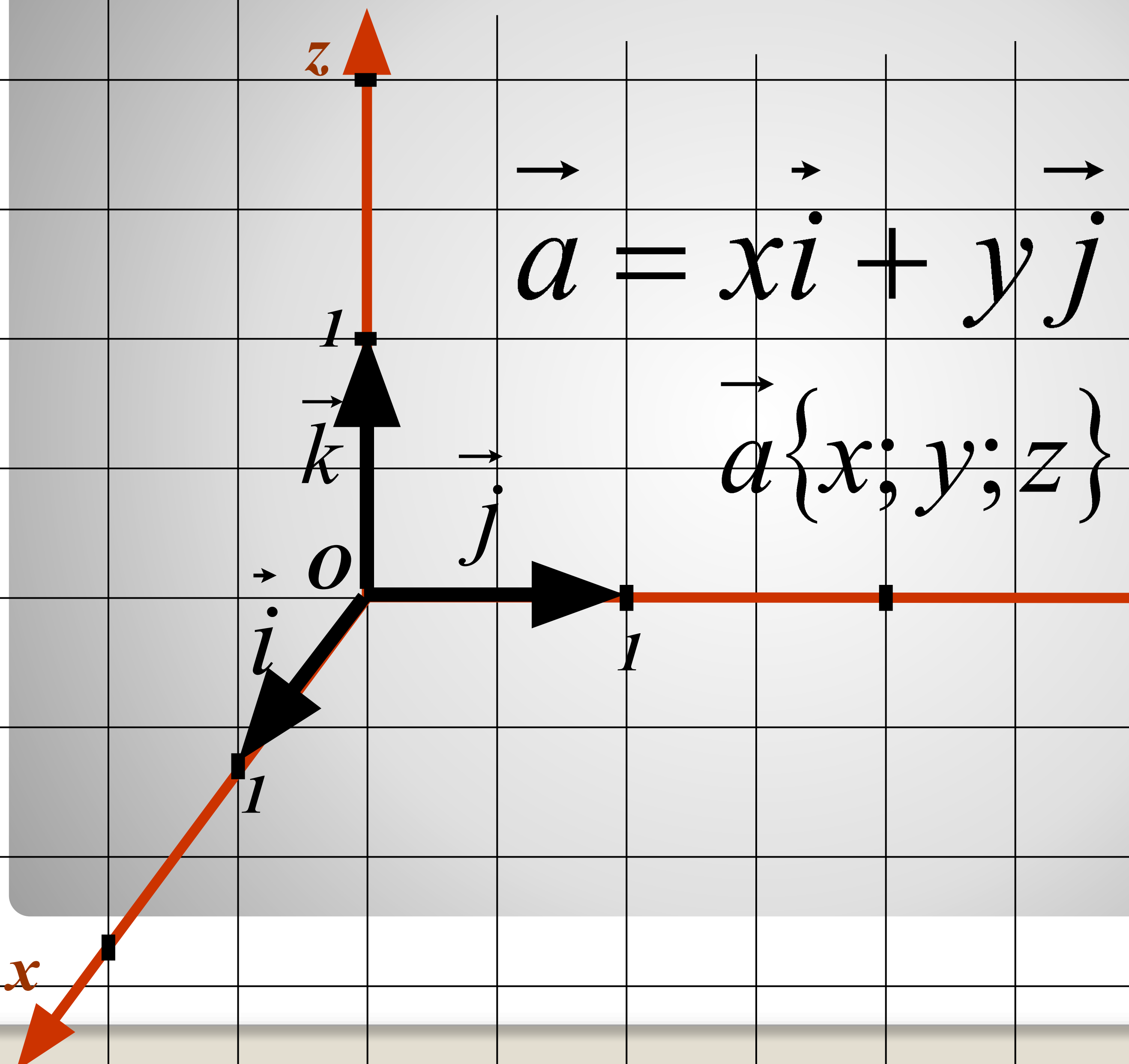
Свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например,

$$\vec{p} = 2(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) - 3(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}) =$$
$$= 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} = \mathbf{-5\vec{b} + 4\vec{c}}$$

<<<< Назад Вернутся

Способы задания вектора

<<<< Вернуться



$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a}\{x; y; z\}$$

Правила действий над векторами с заданными координатами.

1. **Равные векторы имеют равные координаты.**

Пусть $\begin{cases} \vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \\ \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \end{cases}$ $\vec{a} = \vec{b}$ ***, тогда***

$$\vec{a}\{x_1\vec{i}; y_1\vec{j}; z_1\vec{k}\} \quad \vec{b}\{x_2\vec{i}; y_2\vec{j}; z_2\vec{k}\} \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} - \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= (x_1 - x_2)\cdot\vec{i} + (y_1 - y_2)\cdot\vec{j} + (z_1 - z_2)\cdot\vec{k} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = \vec{0}$$

Следовательно $\boxed{x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2}$

<< << Вернуться Далее Далее

Правила действий над векторами с заданными координатами.

2. Каждая координата суммы двух (и более) векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Дано: $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Доказать: $\vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

$$\vec{a}\{x_1\vec{i}; y_1\vec{j}; z_1\vec{k}\} \quad \vec{b}\{x_2\vec{i}; y_2\vec{j}; z_2\vec{k}\}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= (x_1 + x_2)\cdot\vec{i} + (y_1 + y_2)\cdot\vec{j} + (z_1 + z_2)\cdot\vec{k} = \vec{c}$$

Следовательно $\boxed{\vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}}$

<<<< Назад ДалееДалее >>

Правила действий над векторами с заданными координатами.

3. **Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты на это число.**

Дано: $\vec{a}\{x; y; z\}$ α *– произв.число* $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{c}$

Доказать: $\vec{c}\{\alpha \cdot x; \alpha \cdot y; \alpha \cdot z\}$

4. **Каждая координата разности двух векторов равна число равна разности соответствующих координат на этих векторов.**

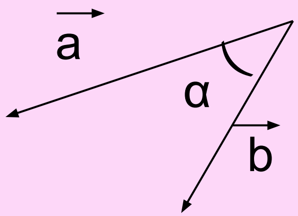
Дано: $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Доказать: $\vec{c}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$

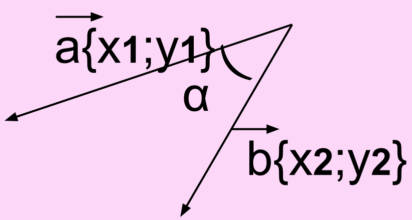
<<<< Назад Вернуться

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.



$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha}$$



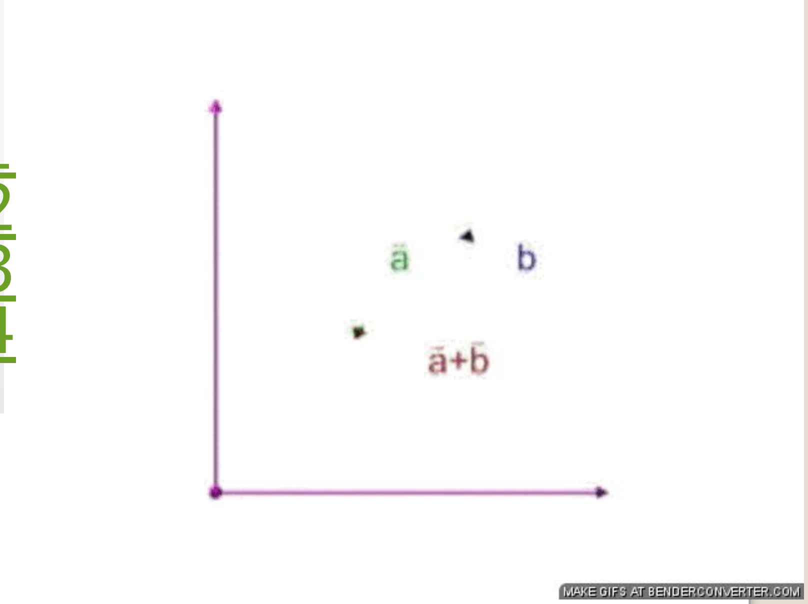
Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ выражается формулой

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}$$

<<<< Вернуться

Решение задач

Задача 1
Задача 2
Задача 3
Задача 4

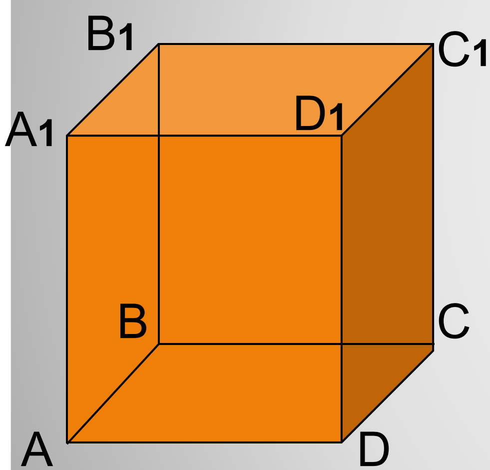


Повторить материал

Вернуться на главную

Задача 1

Дано: ABCDA1B1C1D1 - параллелепипед.
Упростите выражение: $\overrightarrow{C_1D}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{CC_1}$

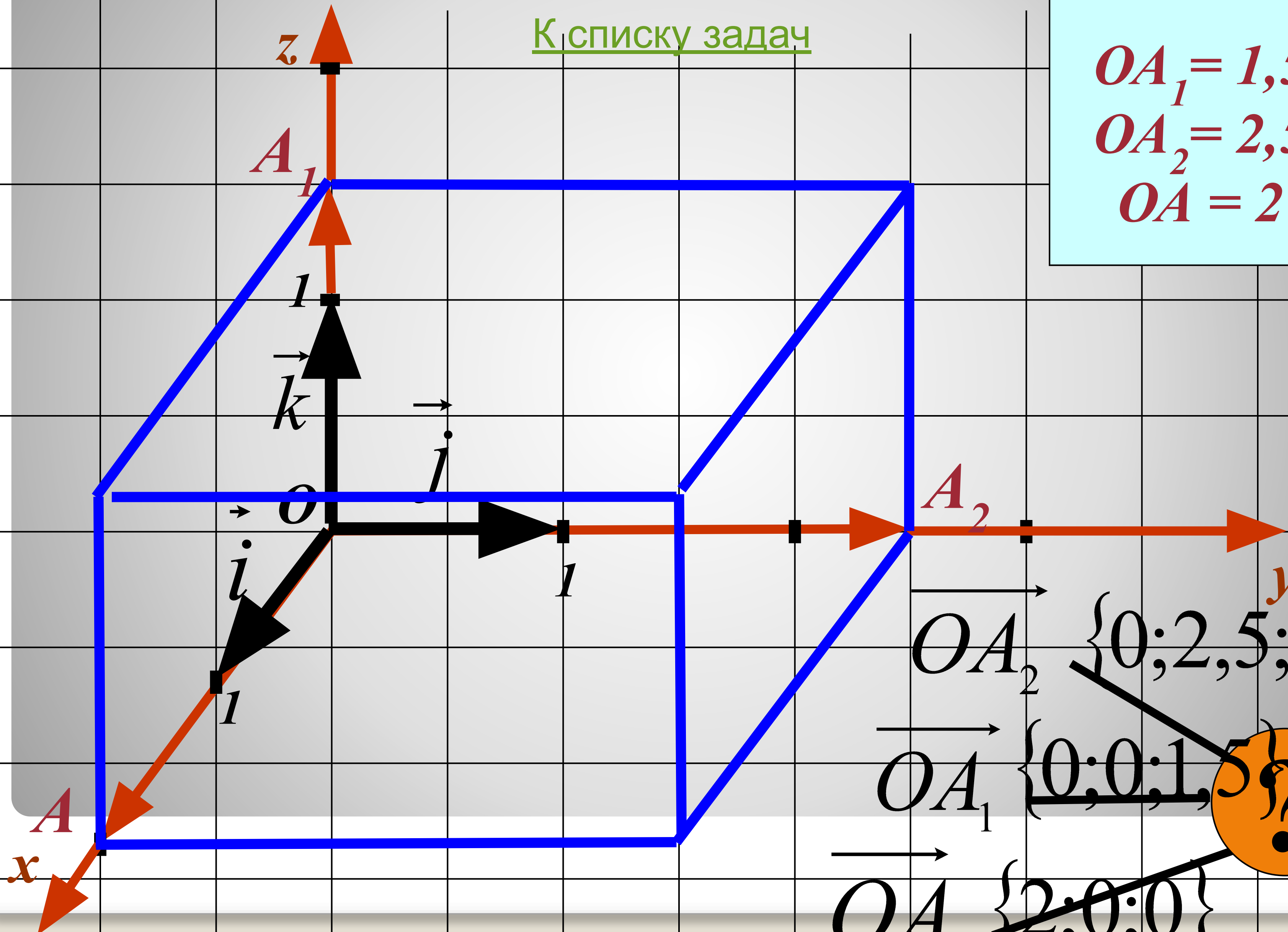


Решение:
Воспользуемся свойствами сложения векторов
$\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{CD}$,
$\overrightarrow{D_1A_1}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}$,
Получаем: $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB_1}$,
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BA_1}$

К списку задач

№2Определите координаты векторов:

К списку задач



$OA_1 = 1,5$
$OA_2 = 2,5$
$OA = 2$

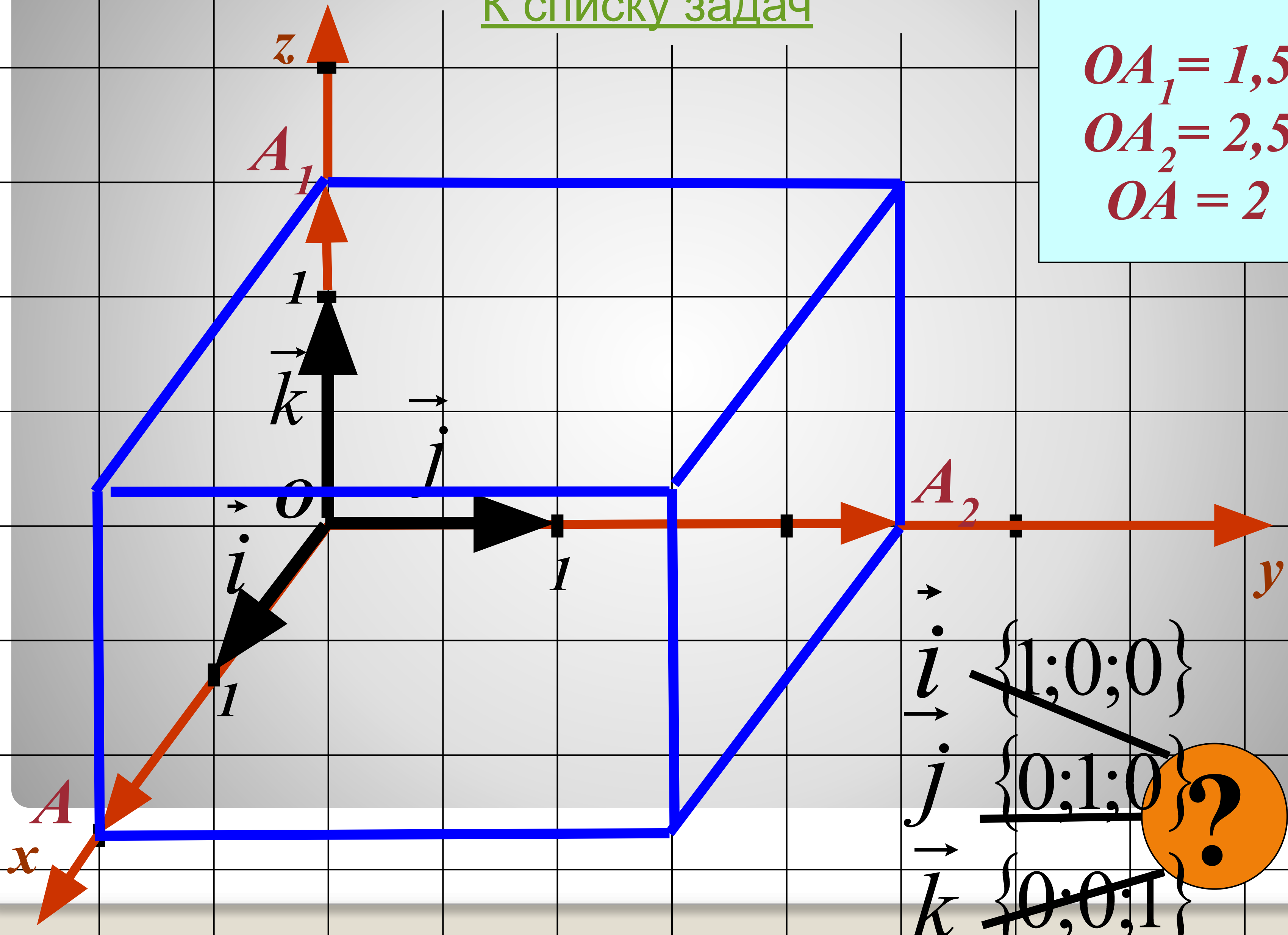
$\overrightarrow{OA_2}\ \{0;2,5;0\}$

$\overrightarrow{OA_1}\ \{0;0;1,5\}$

$\overrightarrow{OA}\ \{2;0;0\}$

№3Определение координат векторов:

К списку задач



$OA_1 = 1,5$
$OA_2 = 2,5$
$OA = 2$

$\vec{i}\ \{1;0;0\}$

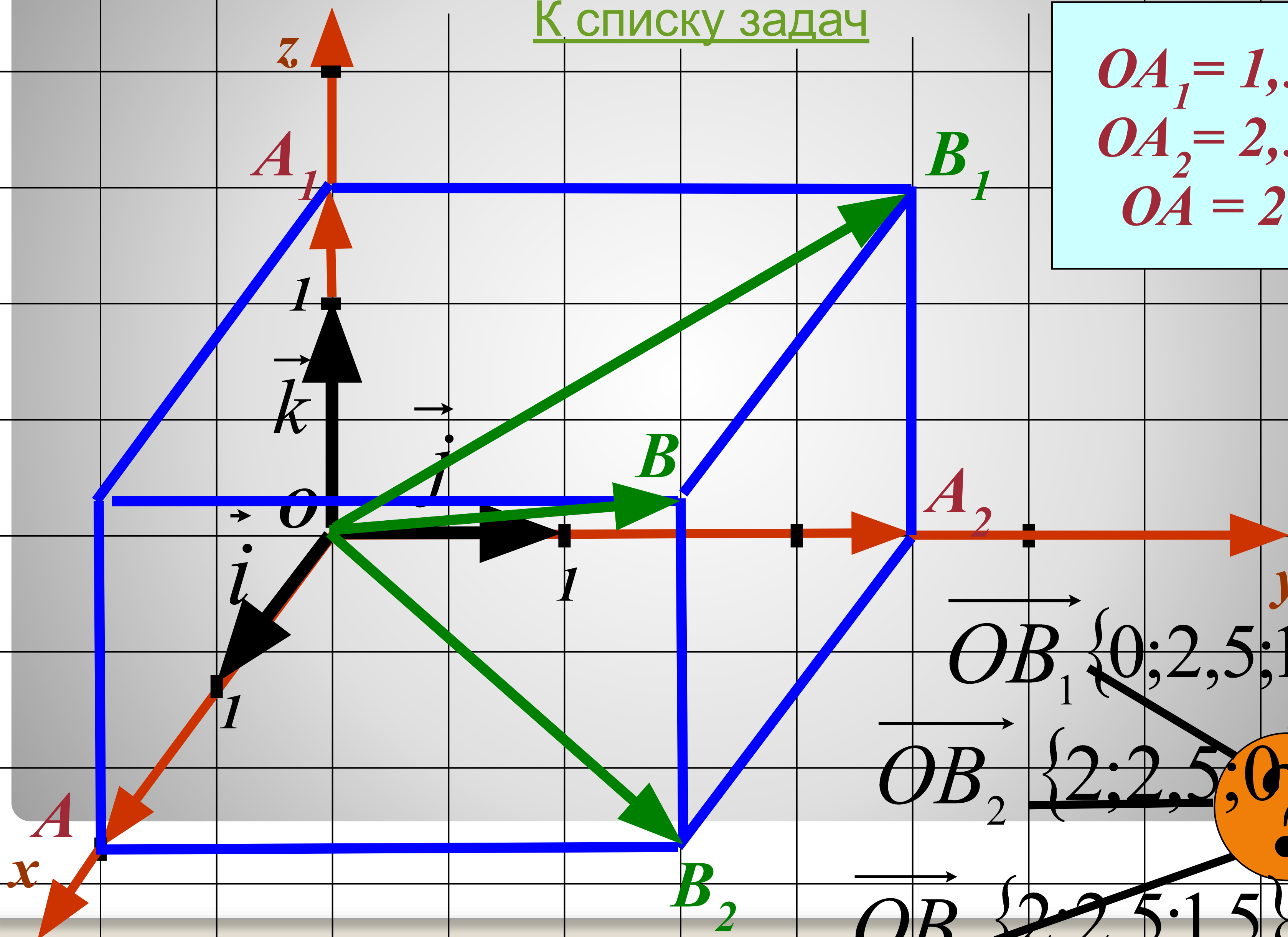
$\vec{j}\ \{0;1;0\}$

$\vec{k}\ \{0;0;1\}$

№4Определите координаты векторов:

К списку задач

$OA_1 = 1{,}5$
$OA_2 = 2{,}5$
$OA = 2$



$\overrightarrow{OB_1}\{0;2{,}5;1{,}5\}$

$\overrightarrow{OB_2}\{2;2{,}5;0\}$

$\overrightarrow{OB}\{2;2{,}5;1{,}5\}$

Пространство ,плоскость,вектора
Шагают рядом , и всегда
В решении любой задачи
Пусть вам сопутствует удача!

[В начало]