Некоторые применения теоремы Пифагора

Автор Янченко Т.Л.

Август 12, 2004

Теорема Пифагора и подобие фигур

Ниже будем использовать следующие обозначения:

- катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника
- ABC соответственно a, b и c ;
- sin A = a / c, sin B = b / c ;
- фигуры 1, 2, 3, их длины, площади и их объемы
- соответственно $F_1, F_2, F_3; L_1, L_2, L_3; S_1, S_2, S_3$ и V_1, V_2, V_3.

Теорема Пифагора и подобие фигур для n - мерного простр

- Будем считать F_1 подобной F_2 в n - мерном пространств
- коэффициентом подобия к , если есть величины W_1 и W_2
- соответственно такие, что $W_1/W_2=k^n$.
- Т1. Если F_1 подобна F_3, где $k={}^n\sqrt{a^2/c^2}$, F_2 подобна F_3, где
- $k={}^n\sqrt{b^2/c^2}$, и $W_1+W_2=W3$, то a,b и c - стороны прямоугол треугольника.
- Т2. Если F1 подобна F3, где $k={}^n\sqrt{a^2/c^2}$, F2 подобна F3, гд
- $k={}^n\sqrt{b^2/c^2}$, и a,b и c- стороны прямоугольного треугольн
- $W_1+W_2 = W_3$.

Теорема 1 и теорема 2
для двухмерного пространства

- Т1. Если F_1 подобна F_3, где $k=a/c=\sin A$, F_2 подобна F_3, где $k=b/c=\sin B$, и $S_1+S_2=S_3$, то a,b и c- стороны прямоугольного треугольника.

Т2. Если F_1 подобна F_3, где $k=a/c=\sin A$, F_2 подобна F_3, где $k=b/c=\sin B$, причем a, b и c- стороны прямоугольного треугольника, то $S_1+S_2=S_3$.

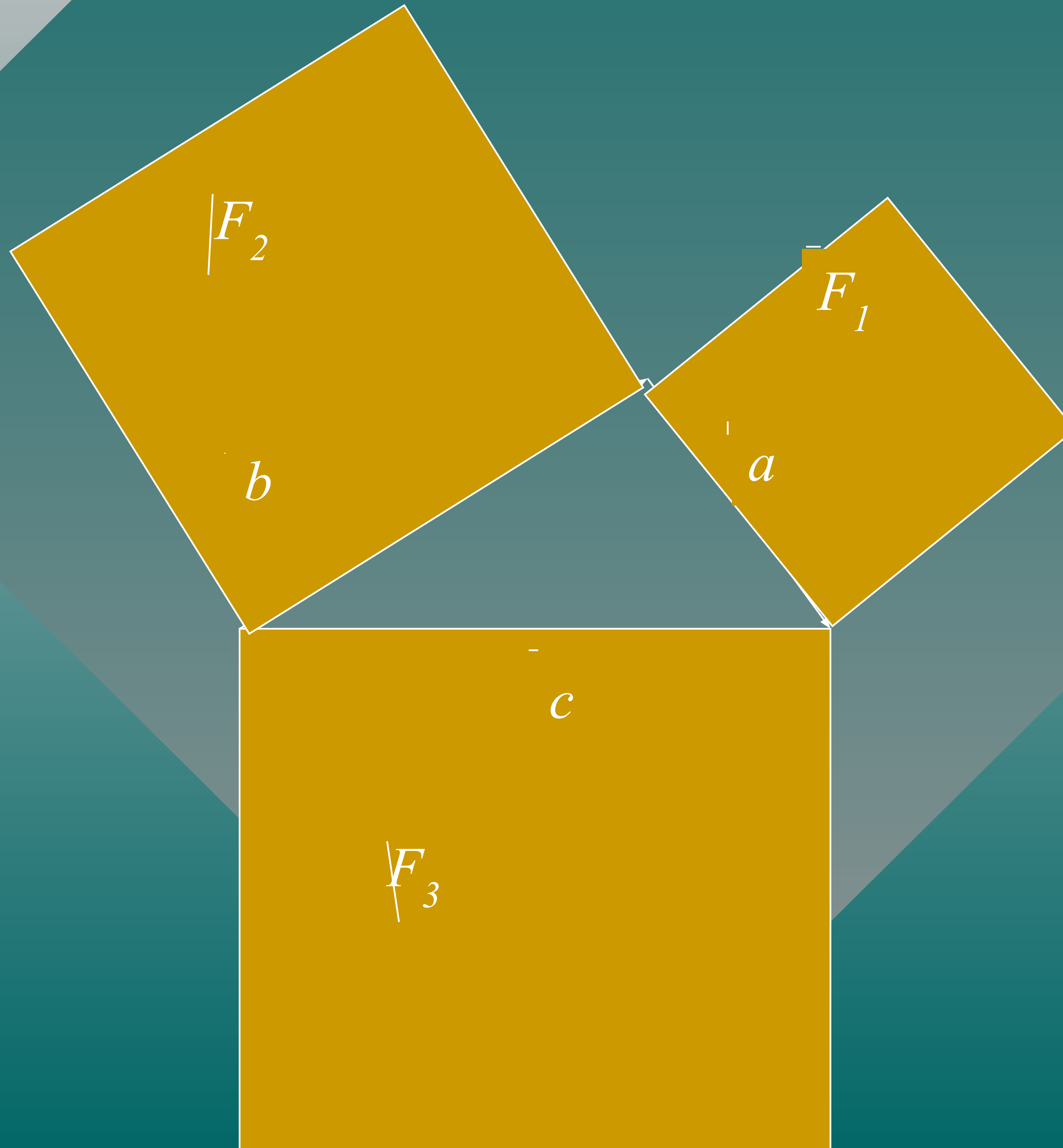
$k_1 = a/c$

$k_2 = b/c$

$a^2 + b^2 = c^2$

$\Updownarrow$

$S_1 + S_2 = S_3$



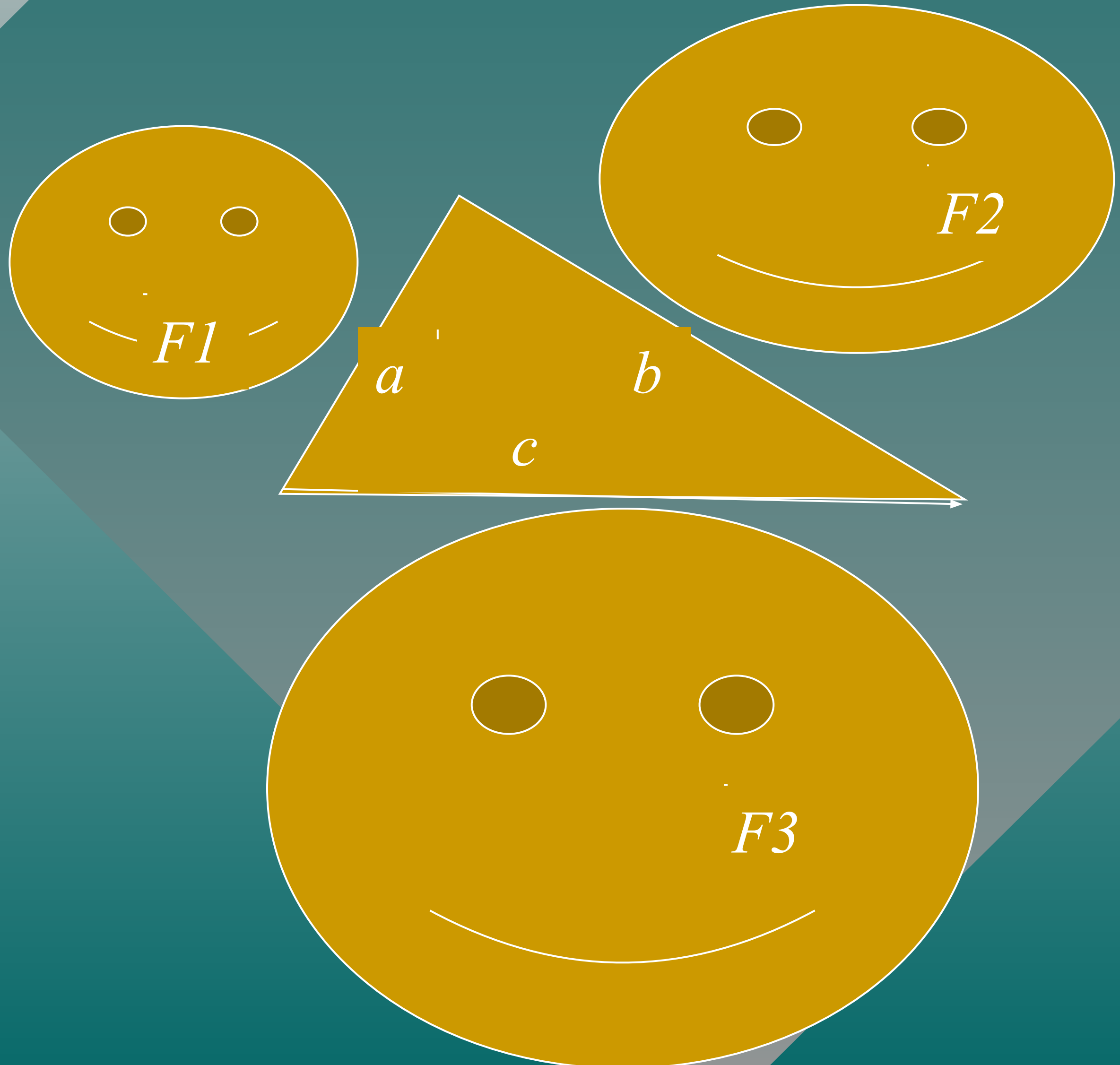
Доказательство Т 1

- Из подобия фигур следует равенство :
- $S_1+S_2=S_3(a^2+b^2)/c^2$ (см.доказательствоТ2).
- По условию $S_1+S_2=S_3$, следовательно
- $(a^2+b^2)/c^2=1$, откуда $a^2+b^2=c^2$. Тогда по
- обратной теореме Пифагора имеем : a, b и c
- есть стороны прямоугольного треугольника.
- Теорема доказана.

Доказательство T2

- Из подобия фигур, отношение площадей
- которых равно квадрату коэффициента
- подобия, следует : $S_1 = (a^2/c^2)S_3$, $S_2 = (b^2/c^2)S_3$.
- Тогда $S_1 + S_2 = (a^2/c^2)\ S_3 + (b^2/c^2)S_3 =$
- $=(a^2/c^2+b^2/c^2)S_3 = S_3(a^2+b^2)/c^2 = S_3$, так как по
- теореме Пифагора $a^2+b^2=c^2$.
- Итак , имеем $S_1+S_2=S_3$. Теорема доказана.

Иллюстрация к F1 и F2



$k_1=a/c$
$k_2=b/c$

$S_1+S_2=S_3$

$\Updownarrow$

$a^2+b^2=c^2$

Теорема 3 и теорема 4 для трехмерного пространства

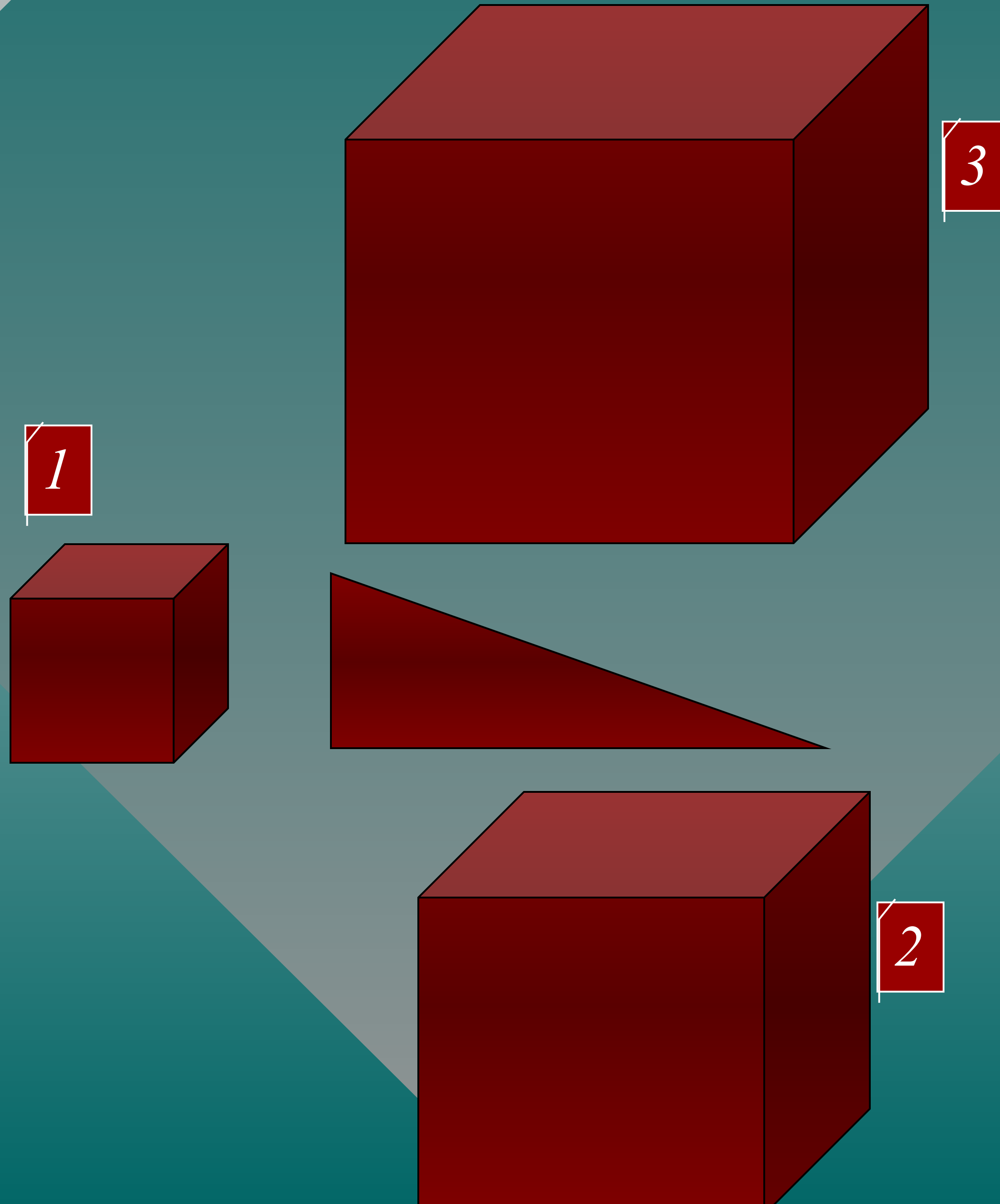
- **Т3**. Если F_1 подобна F_3, где $k=\sqrt[3]{(a/c)^2}$, F_2 подобна F_3, где $k=\sqrt[3]{(b/c)^2}$, и $V_1+V_2=V_3$, то a,b и c- стороны прямоугольного треугольника.
- **Т4**. Если F_1 подобна F_3, где $k=\sqrt[3]{(a/c)^2}$, F_2 подобна F_3, где $k=\sqrt[3]{(b/c)^2}$, причем a, b и c - стороны прямоугольного треугольника, то верно $V_1+V_2=V_3$.

Доказательство Т3 и Т4

Отношение объемов подобных фигур равно куб
коэффициента подобия, поэтому $V_1=(a^2/c^2)V_3$ и
$V_2=(b^2/c^2)V_3$, откуда $V_1+V_2=V_3(a^2+b^2)/c^2$. (1)

Т3. По условию $V_1+V_2=V_3$,тогда из равенства(1
следует $a^2+b^2=c^2$ и то,что a,b и c - стороны
прямоугольного треугольника.

Т4. По условию a,b и c-стороны прямоугольно
треугольника, т.е. $a^2+b^2=c^2$,тогда из равенства
(1) следует, что $V_1+V_2=V_3$. Теоремы доказаны.



$$k_1 = {}^3V^{-}(a/c)^2$$
$$k_2 = {}^3V^{-}(b/c)^2$$

$$V_1 + V_2 = V_3$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

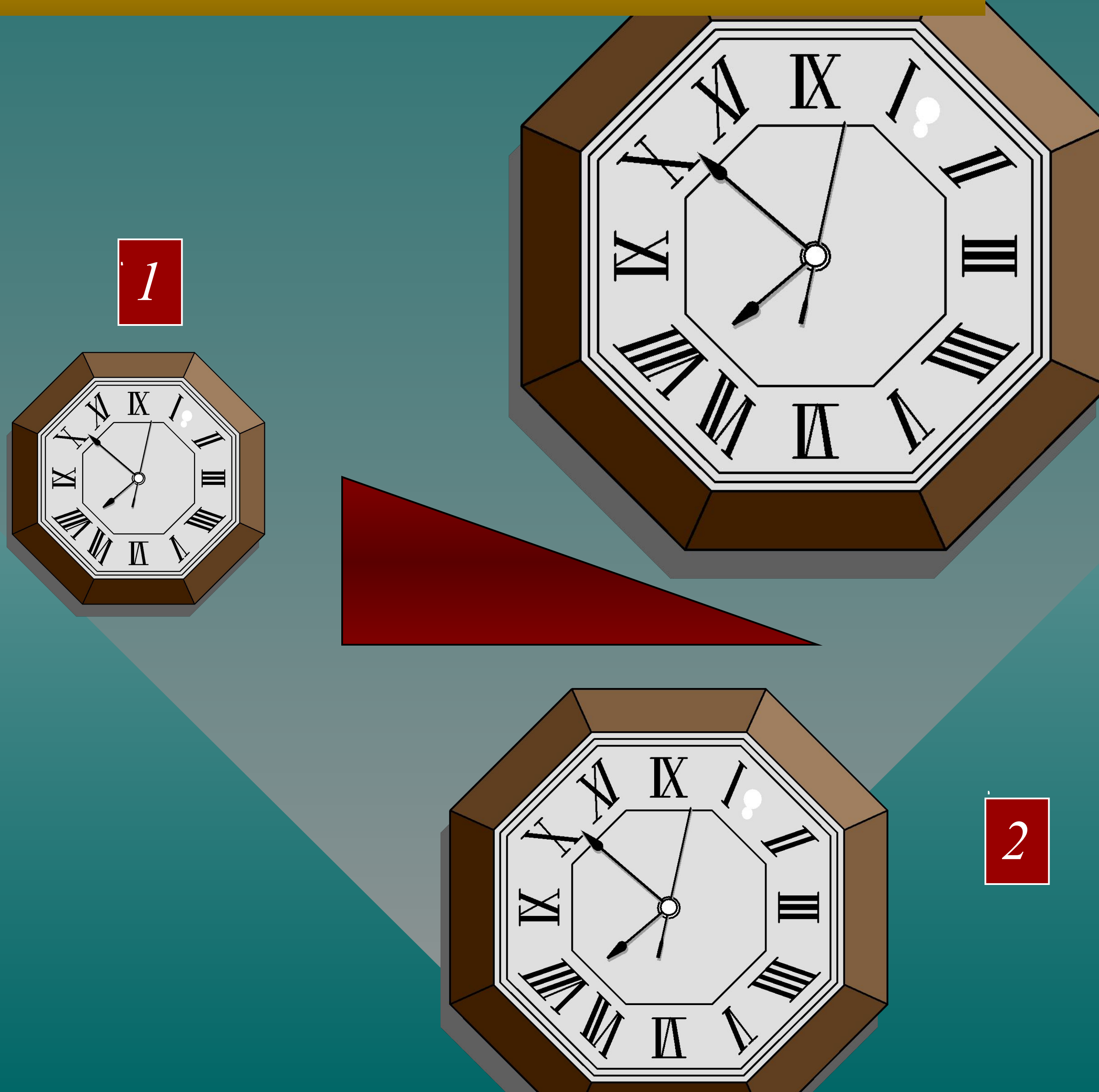
Иллюстрация к теоремам 3 и 4

$k_1={}^3V^-(a/c)2$
$k_2={}^3V^-(b/c)2$

$V_1+V_2=V_3$

$\Updownarrow$

$a^2+b^2=c^2$



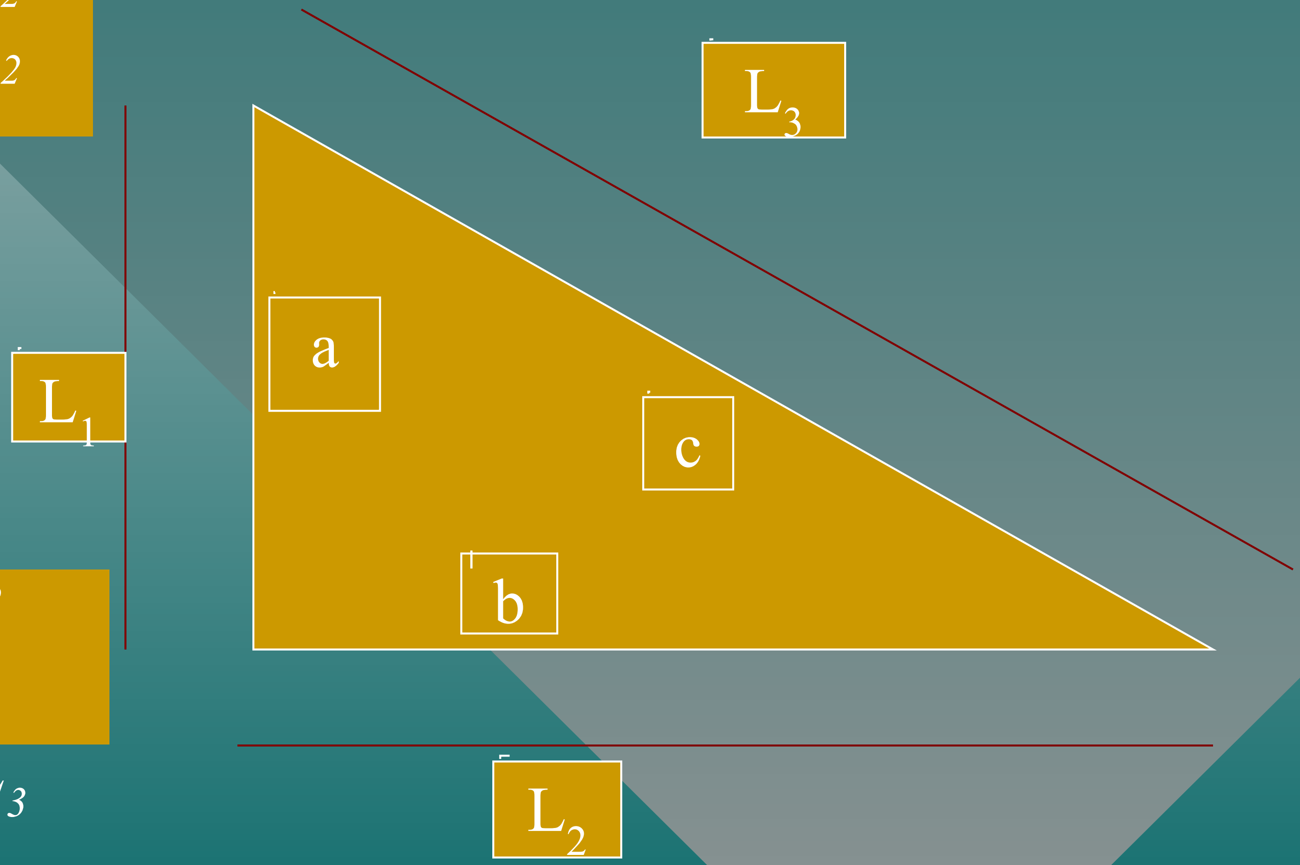
Теоремы 5 и 6 для одномерного пространства

- **Т5.** Если F_1 подобна F_3, где $к=a^2/c^2$, F_2 подобна F_3 ,
- где $к=b^2/c^2$, и $L_1+L_2=L_3$, то a,b и c - стороны
- прямоугольного треугольника .
- Т6. Если F_1 подобна F_3, где $к=a^2/c^2$, F_2 подобна F_3 ,
- где $к=b^2/c^2$, и a,b и c - стороны прямоугольного
- треугольника , то $L_1+L_2=L_3$.

Иллюстрация для одномерного пространства

$k_1 = a^2/c^2$

$k_2 = b^2/c^2$



$a^2 + b^2 = c^2$

$\Leftrightarrow$

$L_1 + L_2 = L_3$