

**Числовые
характеристики
(параметры)
распределений
случайных величин**

литература

« QUE SAIS-JE ? »
LE POINT DES CONNAISSANCES ACTUELLES

PROBABILITÉ ET CERTITUDE

par

Émile BOREL

*Membre de l'Institut et des Académies des Sciences
Directeur honoraire de l'École Normale Supérieure*



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

1956

QUATROZIÈME MILLE

ЭМИЛЬ БОРЕЛЬ

ВЕРОЯТНОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ

Перевод
со второго французского издания
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Под редакцией и с предисловием
Б. В. ГНЕДЕНКО

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

Математическое ожидание:
центр <<тяжести >> распределения

Дискретные распределения

$$M[X] = \sum_i p_i \cdot x_i$$

Непрерывные распределения

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Свойства математического ожидания:

1. $M[C]=C$, т.е. математическое ожидание постоянной равно самой постоянной;
2. $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C ;
3. $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$ для произвольных случайных величин X, Y ;
4. $M[X_1 \cdot X_2 \cdots X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdots M[X_n]$ для n независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n .

Размерность математического ожидания равна размерности случайной величины X .

Виды параметров

- Моменты
 - начальные
 - центральные
- Параметры сдвига
 - математическое ожидание
 - медиана
 - мода
- Параметры формы
 - дисперсия
 - асимметрия
 - эксцесс

Моменты

Различают *начальные моменты* k -го порядка

$$\alpha_k = M[x^k]$$

и *центральные моменты* k -го порядка

$$\mu_k = M[(x - M[x])^k].$$

Связь между центральными и начальными моментами

Положим $(M[x] = m)$.

Применим формулу бинома Ньютона

$$(x - M[x])^k = ((-m) + x)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot C_k^i \cdot m^i \cdot x^{k-i}.$$

Возьмем мат. ожидание от левой и правой частей этого выражения и получим выражение, связывающее центральные и начальные моменты

$$\mu_k = M [(x - M[x])^k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot C_k^i \cdot m^i \cdot \alpha_{k-i}$$

k	μ_k	α_k
0	1	1
1	0	$M[X]$
2	$D[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2$	$M[X^2]$
3	$\alpha_3 - 3\alpha_1 \cdot \alpha_2 - 2\alpha_1^3$	$M[X^3]$
4	$\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_1^4$	$M[X^4]$
...

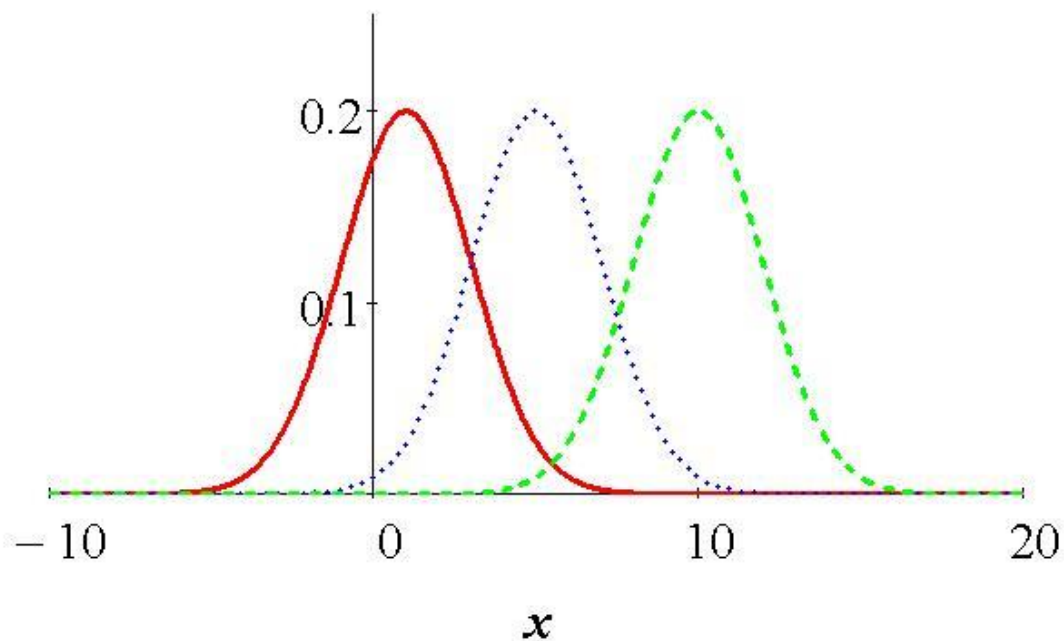
Примеры — разные средние

$dnorm(x, 1, 2)$

$dnorm(x, 5, 2)$

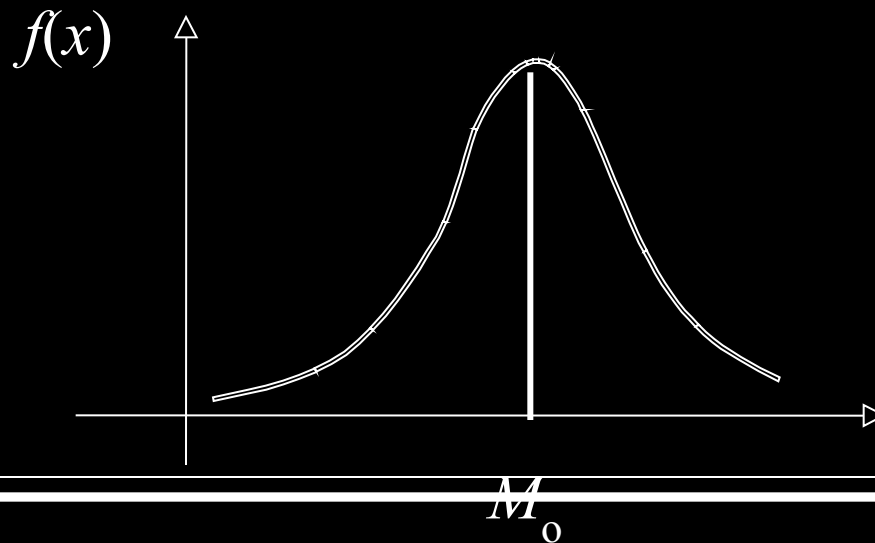
.....

$dnorm(x, 10, 2)$



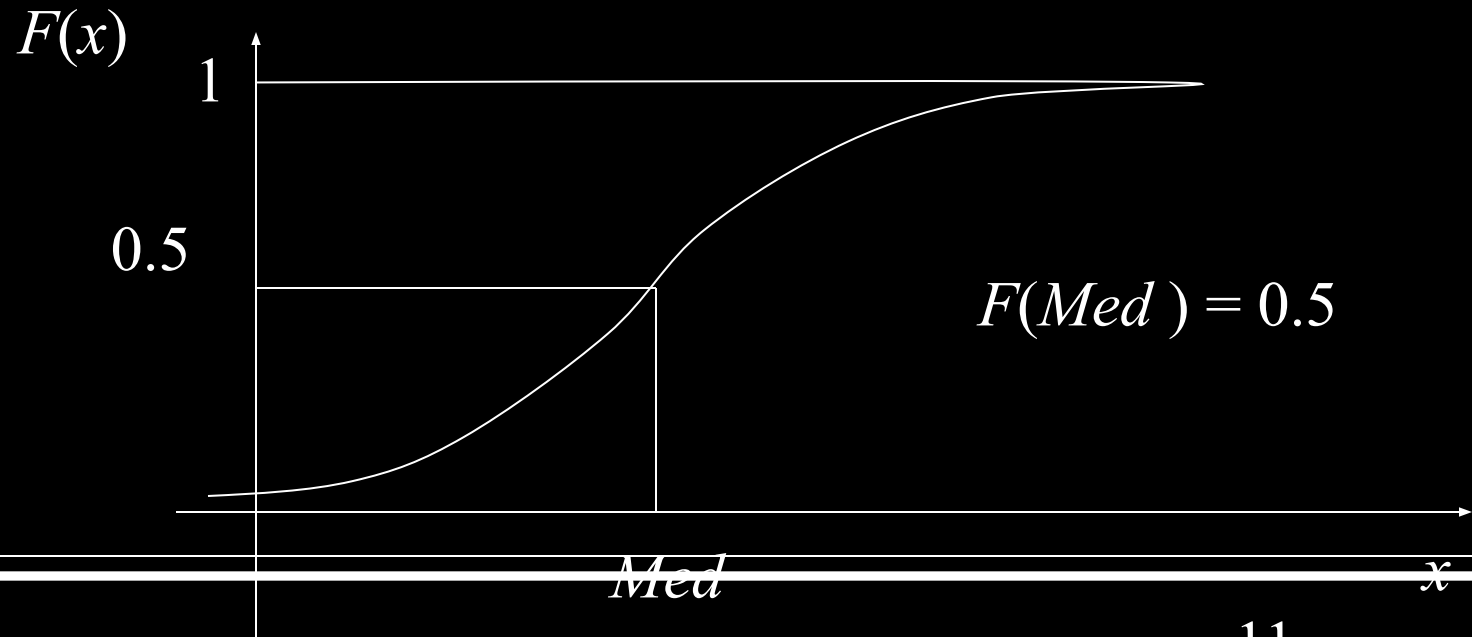
Мода

Значение M_0 непрерывной случайной величины, при котором имеет место максимум плотности распределения. Для дискретной СВ -- ее наиболее вероятное значение.



Медиана

- Значение случайной величины $x = Med$, которое делит область ее значений на две части так, что вероятности попадания в каждую из них равна 0.5.



Параметры формы (масштаба)

- Дисперсия D_x и среднеквадратичное отклонение σ^2

Дискретные СВ

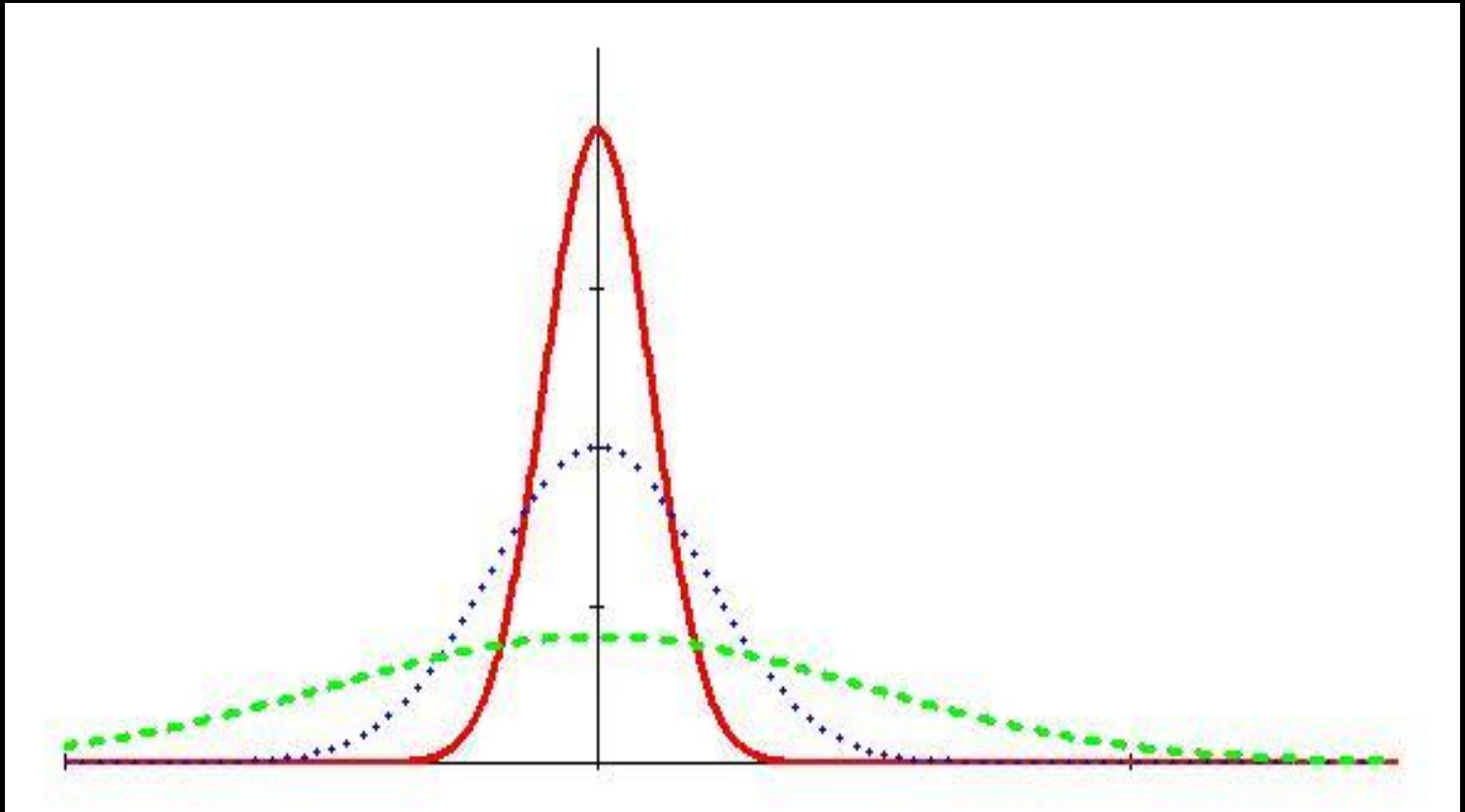
$$D_x = \sum_i p_i \cdot (x_i - M[X])^2$$

Непрерывные СВ

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[x])^2 f(x) dx$$

$$D_x = \sigma^2$$

Разные дисперсии



Свойства дисперсии

$$\begin{aligned} D[X] &= M[(X - m_X)^2] = M[X^2 - 2Xm_X + m_X^2] = \\ &= M[X^2] - 2m_X M[X] + m_X^2 = M[X^2] - m_X^2. \end{aligned}$$

1. $D[C] = 0$, где $C = const$;
2. $D[X] \geq 0$;
3. $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C ;
4. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$ для независимых случайных величин X и Y .

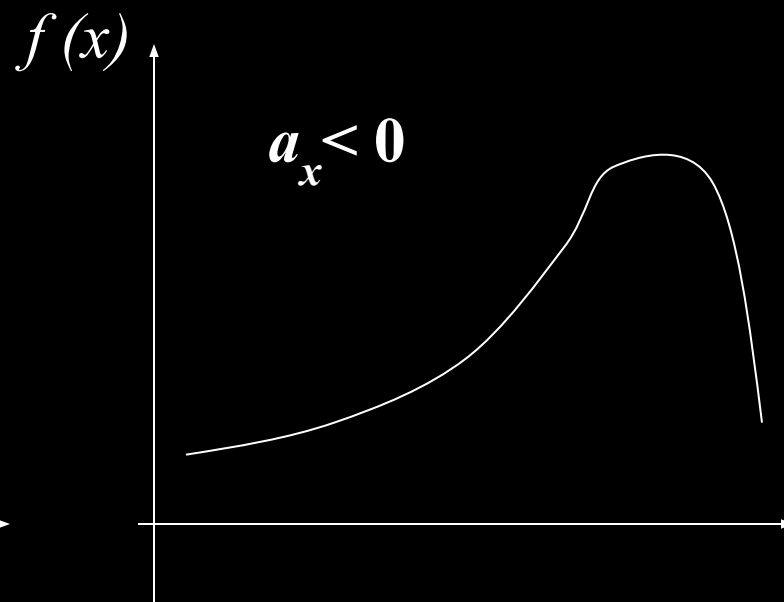
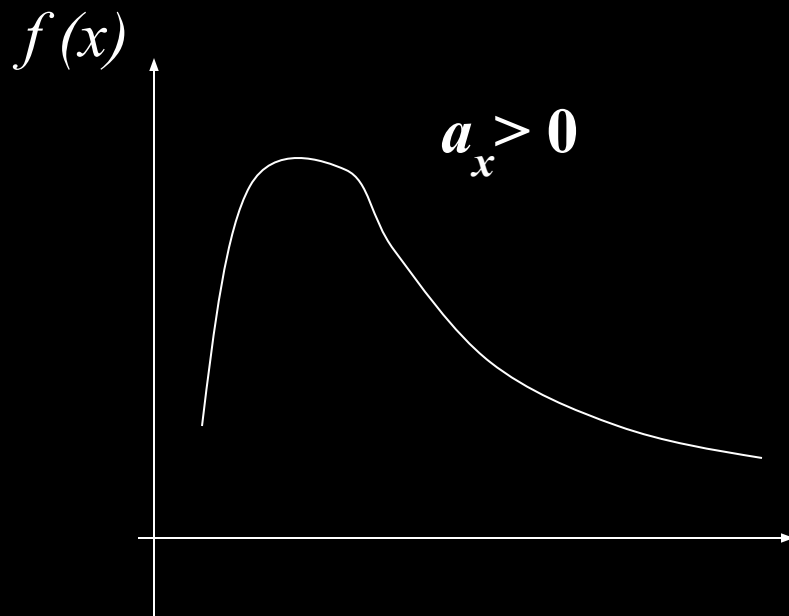
Свойства среднего квадратического отклонения:

1. $\sigma[C] = 0$, где $C = Const$;
2. $\sigma[C \cdot X] = C \cdot \sigma[X]$;
3. $\sigma[X + Y] = \sqrt{\sigma^2[X] + \sigma^2[Y]}$ для независимых случайных величин X и Y .

Параметры формы

- Коэффициент асимметрии

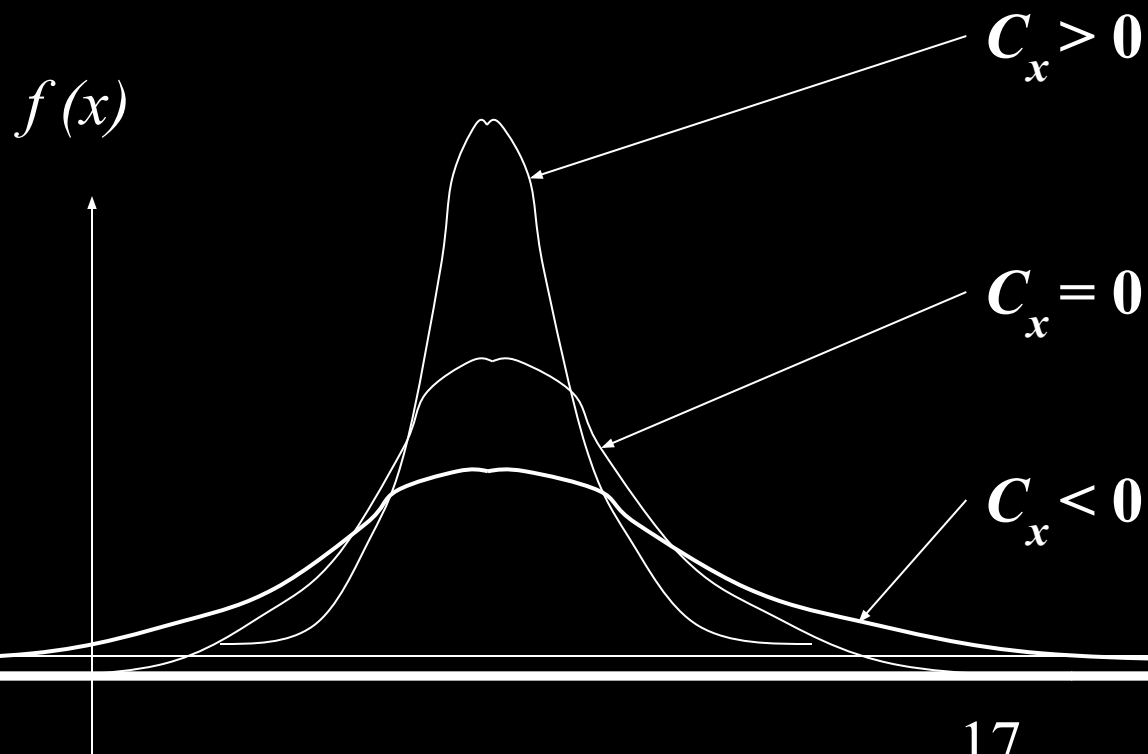
$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$



Параметры формы

- Эксцесс

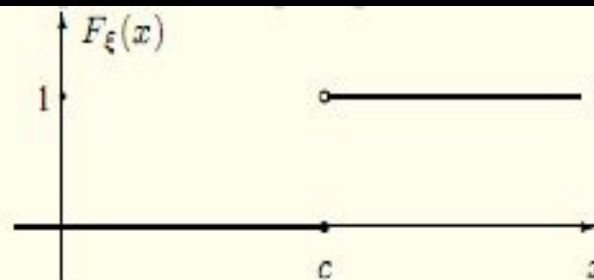
$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$



Основные распределения и их свойства

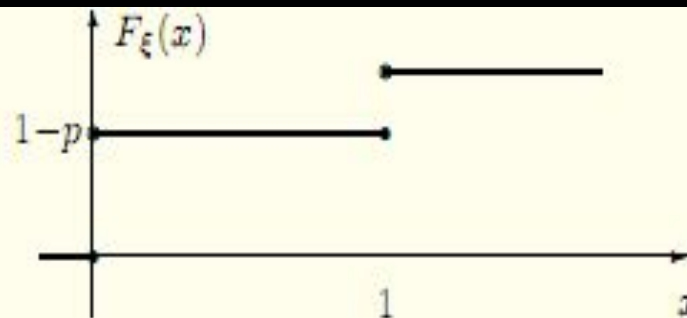
Вырожденное распределение (Распределение константы)

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = P(c < x) = \begin{cases} 0, & x \leq c; \\ 1, & x > c. \end{cases}$$



Распределение Бернулли (Распределение индикатора события)

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1-p, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Равномерное распределение

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

