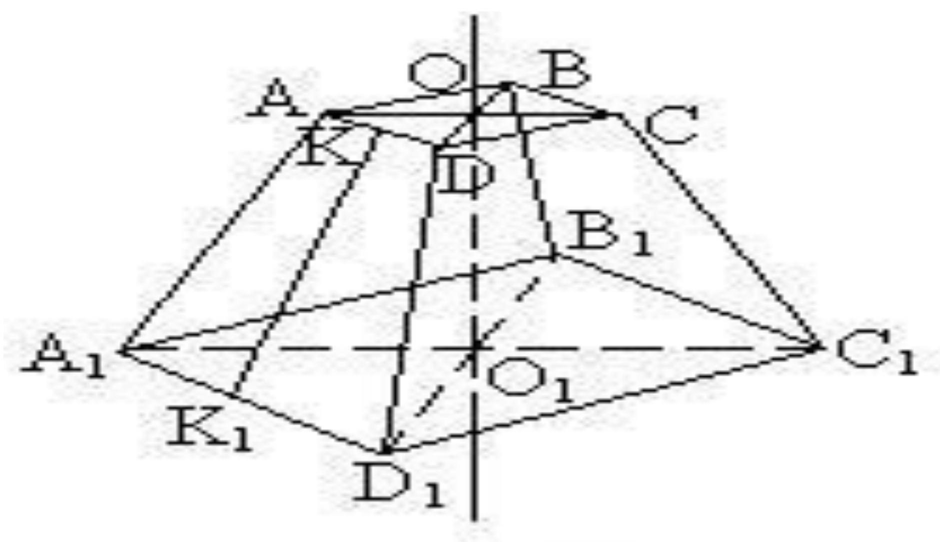
Пирамида

Правильная усеченная пирамида

Усеченная пирамида называется *правильной,* если она составляет часть правильной пирамиды

Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды называется *апофемой*.

Например, KK_1 – апофема правильной усеченной пирамиды. Прямая OO_1 называется *осью* правильной усеченной пирамиды



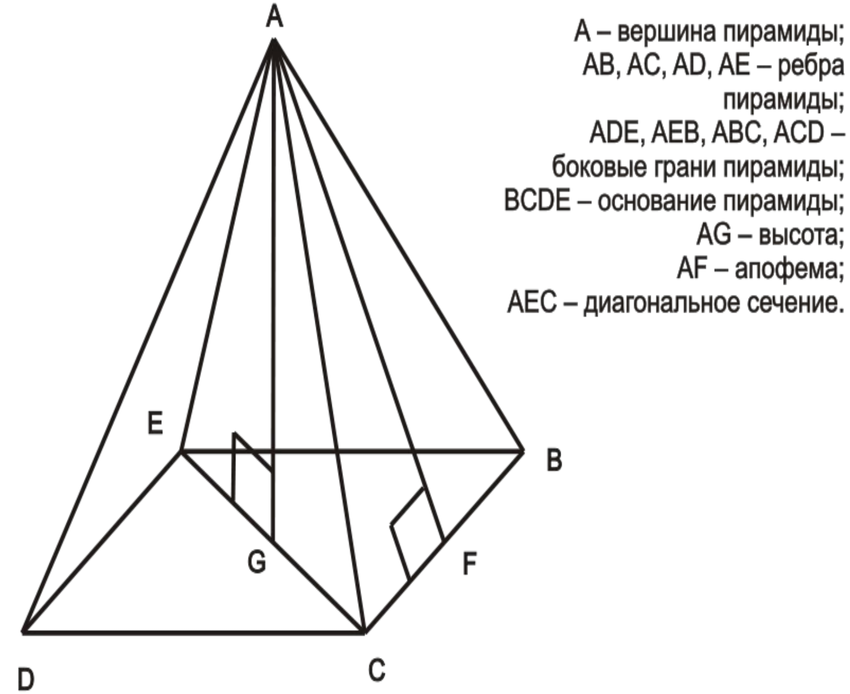
Определение пирамиды.

Пирами́да — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т.д

Слово «пирамида» - греческое. По мнению одних исследователей, большая куча пшеницы и стала образом пирамиды. По мнению других учёных, это слово произошло от названия поминального пирога пирамидальной формы.

Элементы пирамиды

- **апофема** — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины [3];
- **боковые грани** — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;
- **боковые ребра** — общие стороны боковых граней;
- **вершина пирамиды** — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;
- **высота** — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра);
- **диагональное сечение пирамиды** — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;
- **основание** — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды.

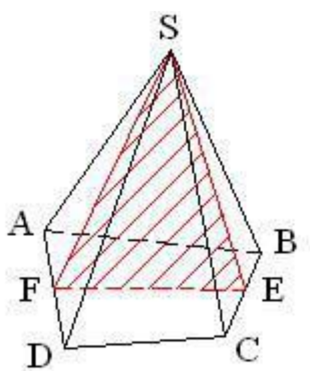


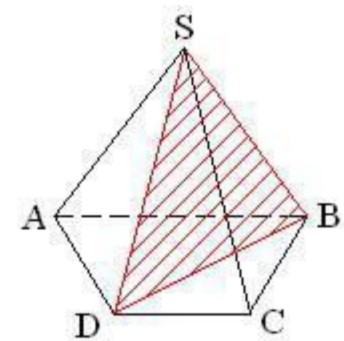
Диагональные сечения пирамиды

Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники (рис. 3). В частности, треугольниками являются диагональные сечения. Это *сечение плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра пирамиды.* ∆CEF – сечение пирамиды SABCD

Плоскость, проведенная через вершину пирамиды и через какую-нибудь диагональ основания, называется *диагональной плоскостью* (рис. 4).

∆SDB – диагональное сечение пирамиды SABCD

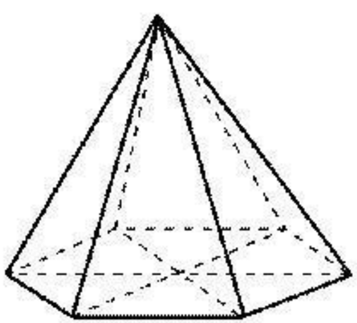


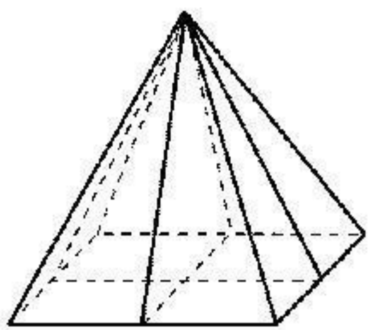


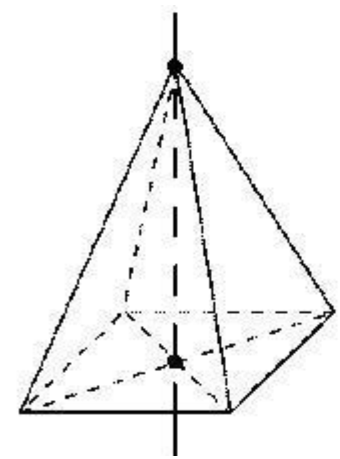
Симметрия правильной пирамиды

Плоскости симметрии: при четном числе сторон основания — плоскости, проходящие через противолежащие боковые ребра; и плоскости, проходящие через медианы, проведенные к основанию противолежащих боковых граней

Ось симметрии: при четном числе сторон основания — ось симметрии, проходящая через вершину правильной пирамиды и центр основания







Правильная пирамида

Определение: *Пирамида называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник и вершина пирамиды проектируется в центр основания.*

Очевидно, у правильной пирамиды боковые ребра равны; следовательно, боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой

Пусть SABCDE – правильная пятиугольная пирамида (рис. 6). Тогда по определению ее основание ABCDE – правильный плоский пятиугольник; центр основания пирамиды O – основание высоты пирамиды SO.

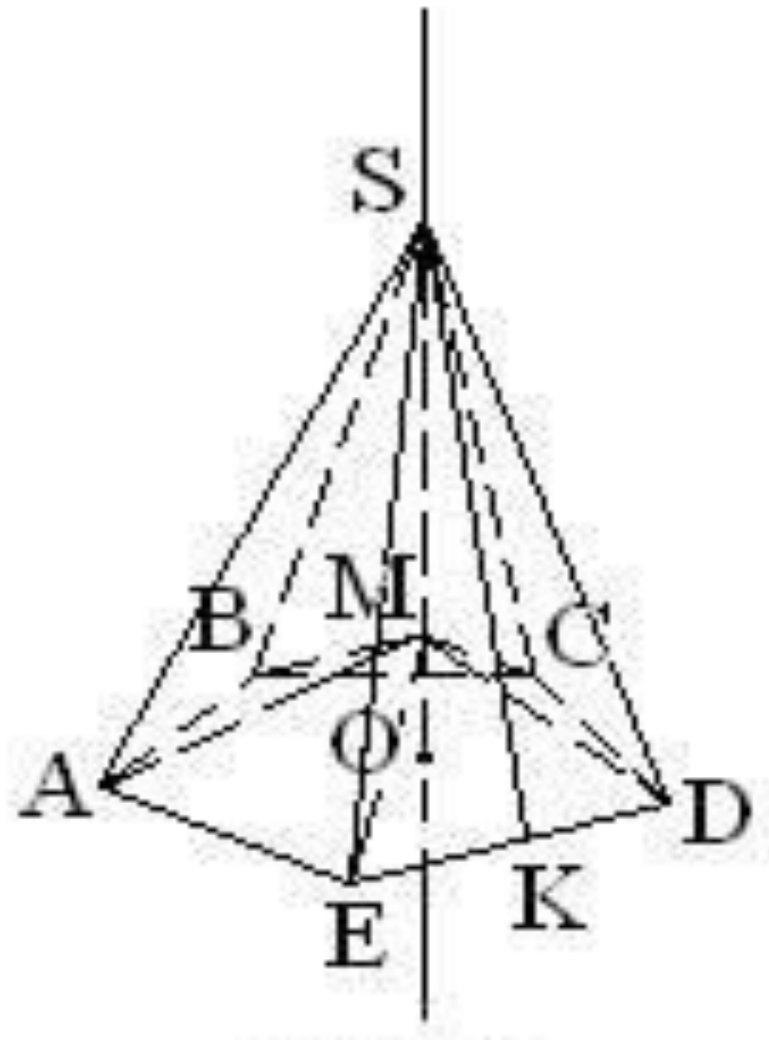
Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины пирамиды, называется *апофемой.*

Например, SK – апофема правильной пирамиды.

При повороте вокруг прямой OS на 360˚/5 правильный многоугольник ABCDE каждый раз совместится с собой, тогда совместится с собой и пирамида. Значит, прямая, на которой лежит высота правильной n-угольной пирамиды, есть ее ось симметрии n-го порядка.

Отсюда следует, что у правильной пирамиды:

1. боковые ребра равны
2. боковые грани равны
3. апофемы равны
4. двугранные углы при основании равны
5. двугранные углы при боковых ребрах равны
6. каждая точка высоты равноудалена от всех вершин основания
7. каждая точка высоты равноудалена от всех боковых граней



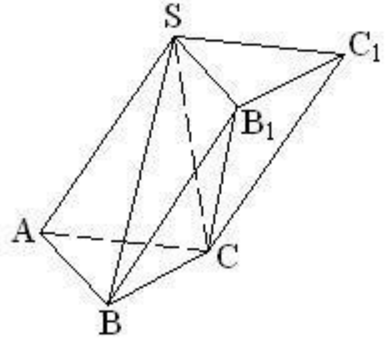
Измерение объема пирамиды

Пусть $SABC$ – треугольная пирамида с вершиной S и основанием ABC. Дополним эту пирамиду до треугольной призмы с тем же основанием и высотой (рис. 14). Эта призма составлена из трех пирамид: данной пирамиды $SABCD$ и еще двух треугольных пирамид SCC_1B_1 и $SCBB_1$.

У второй и третьей пирамид равные основания – ΔCC_1B_1 и ΔB_1BC и общая высота, проведенная из вершины S. Поэтому у них равные объемы.

У первой и третьей пирамид тоже равные основания – ΔSAB и ΔBB_1C и совпадающие высоты, проведенные из вершины C. Поэтому у них тоже равные объемы.

Значит, все три пирамиды имеют один и тот же объем. Так как сумма этих объемов равна объему призмы, то объемы пирамид равны $SH/3$.



Итак, *объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:*

$V = 1/3 \cdot SH$