Неравенства

Неравенства

Познакомившись с действительными числами, узнав об их свойствах, мы научились проводить различные арифметические операции над ними, такие как алгебраические преобразования выражений или решение уравнений. Настало время неравенств.

Неравенства

- Свойства числовых неравенств
- Решение линейных неравенств

КОНЕЦ

Сначала

$X \gtrless Y$

свойства

[redacted]

Недавно мы ввели понятие числового неравенства:

$a<b$ – это значит, что **$a-b$** - положительное число;

$a<b$ – это значит, что **$a-b$** – отрицательное число.

Числовые неравенства обладают рядом свойств, знание которых поможет нам в дальнейшем работать с неравенствами.

Для чего нужно?

Для чего нужно уметь решать уравнения, вы знаете: до сих пор математическая модель практически любой реальной ситуации, которую мы рассматривали, представляла собой либо уравнение, либо систему уравнений. На самом деле встречаются и другие математические модели — неравенства, просто мы пока таких ситуаций избегали.

Для чего нужно?

Знание свойств числовых неравенств будет полезно и для исследования функций. Например, с неравенствами связаны такие известные вам свойства функций, как наибольшее и наименьшее значения функции на некотором промежутке, ограниченность функции снизу или сверху. С неравенствами связано и свойство возрастания или убывания функции, о котором пойдет речь в одном из следующих параграфов. Так что, как видите, без знания свойств числовых неравенств нам не обойтись. Да мы сами уже могли убедиться в необходимости умения работать с неравенствами.

Свойство 1

Если **a>b** и **b>c** , то **a>c**.

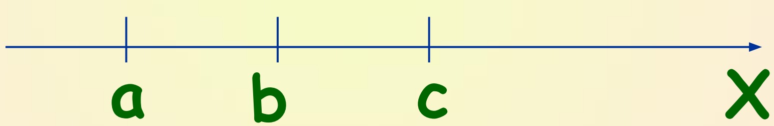
Доказательство:

По условию, **a>b**, т.е. **a -b** — положительное число. Аналогично, так как **b>c**, делаем вывод, что **b-c** — положительное число.

Сложив положительные числа **a-b** и **b-c**, получим положительное число. Имеем **(a-b) +(b-c)=a-c**. Значит, **a-c** — положительное число, т.е. **a>c**, что и требовалось доказать.

Свойство 1

Свойство 1 можно обосновать, используя геометрическую модель множества действительных чисел, т.е. числовую прямую. Неравенство **a>b** означает, что на числовой прямой точка **a** расположена правее точки **b**, а неравенство **b>c** — что точка **b** расположена правее точки **c** . Но тогда точка **a** расположена на прямой правее точки с, т. е. **a > c**.



Свойство 2

Если **$a>b$**, то **$a+c>b+c$** .

То есть, если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же действительное число, то знак уравнения не меняется.

Свойство 3

Если $a>b$ и $m>0$, то $am>bm$;

Если $a>b$ и $m<0$, то $am<bm$.

Смысл свойства 3 заключается в следующем: если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства следует сохранить. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства следует изменить (<на>,>на<).

Свойство 3

Если $a>b$ и $m>0$, то $am>bm$;

Если $a>b$ и $m<0$, то $am<bm$.

То же относится к делению обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число **m**, *то* поскольку деление на **m** всегда можно заменить умножением на **1/m** .

Свойство 3

Из свойства 3, в частности, следует, что, умножив обе части неравенства **a>b** на **–1**, получим **–a<–b**. Это значит, что если изменить знаки у обеих частей неравенства, то надо изменить и знак неравенства: если **a>b**, то **–a<–b**.

Свойство 4

Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

Доказательство:

Так как $a>b$, то, согласно свойству 2, $a+c>b+c$. Аналогично, так как $c>d$, то $b+c>b+d$. Итак, $a+c>b+c$, $b+c>b+d$. Тогда, в силу свойства 1, получаем, что $a+c>b+d$.

Свойство 5

Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ – положительные числа, и $\mathbf{a>c}$, $\mathbf{c>d}$,то $\mathbf{ac>bd}$.

Доказательство:

Так как $\mathbf{a>b}$ и $\mathbf{c>0}$, то $\mathbf{ac>\ bc}$. Аналогично, так как $\mathbf{c>b}$ и $\mathbf{b>0}$, то $\mathbf{cb>ab}$. Итак, $\mathbf{ac>bc}$, $\mathbf{bc>bd}$. Тогда, согласно свойству 1, получаем, что $\mathbf{ac>bd}$.

Свойство 6

Если **a** и **b** — неотрицательные числа и **a>b**, то **a** в степени **n > b** в степени **n**, где **n** — любое натуральное число.

Смысл свойства 6 заключается в следующем: если обе части неравенства — неотрицательные числа, то их можно возвести в одну и ту же натуральную степень, сохранив знак неравенства.

Смысл неравенства

Обычно неравенства вида $a>b$, $c>d$ (или $a<b$, $c<d$) называют неравенствами одинакового смысла, а неравенства $a>b$ и $c>d$ – неравенствами противоположного смысла. Свойство 5 означает, что при умножении неравенств одинакового смысла, у которых левые и правые части — положительные числа, получится неравенство того же смысла.

[Оглавление](#)

Решение линейных неравеств

Решение неравенства с переменной

$ax+b<y$

Свойства числовых равенств помогали нам решать уравнения, т.е. находить те значения переменной, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство. Точно так же свойства числовых неравенств помогут нам решать **неравенства с переменной**, т. е. находить те значения переменной, при которых неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство. Каждое такое значение называют обычно **решением неравенства с переменной.**

Пример

$ax+b<y$

Рассмотрим, например, неравенство: $2x+5<7$. Подставив вместо x значение 0, получим $5<7$ - верное неравенство; значит, $x=0$ — решение данного неравенства. Подставив вместо x значение 1, получим $7<7$ - неверное неравенство; поэтому $x=1$ не является решением данного неравенства. Подставив вместо x значение -3, получим $-6+5<7$, т. е. $-1<7$ - верное неравенство; следовательно, $x=-1$ - решение данного неравенства. Подставив вместо x значение 2,5, получим $2*2,5+5<7$, т.е. $10<7$ - неверное неравенство. Значит, $x=2,5$ не является решением неравенства.

Пример

$ax+b<y$

Но вы же понимаете, что это — тупиковый путь: ни один математик не станет так решать неравенство, ведь все числа невозможно перебрать! Вот тут-то и нужно использовать свойства числовых неравенств, рассуждая следующим образом.

Пример

$ax+b<y$

Нас интересуют такие числа **x**, при которых **2x+5<1** - верное числовое неравенство. Но тогда и **2x+5-5<7-5** - верное неравенство (согласно **свойству 2**: к обеим частям неравенства прибавили одно и то же число **– 5**). Получили более простое неравенство **2x<2**. Разделив обе его части на положительное число **2**, получим (на основании **свойства 3**) верное неравенство **x<1**.

Пример

$ax+b<y$

Что это значит? Это значит, что решением неравенства является любое число **x**, которое меньше **1**. Эти числа заполняют открытый луч (**-∞,1**). Обычно говорят, что этот луч — решение неравенства **$2x+5<7$** (точнее было бы говорить о множестве решений, но математики, как всегда, экономны в словах). Таким образом, можно использовать два варианта записи решений данного неравенства: **$x<1$** или (**-∞,1**).

Решение неравенств

$ax+b<y$

Свойства числовых неравенств позволяют руководствоваться при решении неравенств следующими правилами:

Правило 1

$ax+b<y$

Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.

Правило 2

$ax+b<y$

Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не изменив при этом знак неравенства.

Правило 3

$ax+b<y$

Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Оглавление