Исследования по теории показателей А. М. Ляпунова

Научная школа В. М. Миллионщикова: И.Н. Сергеев, А. Н. Ветохин, В.В. Быков

Кафедра дифференциальных уравнений
Механико-математический факультет
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918, Россия)

В 1892 г. для исследования устойчивости нулевого решения системы по ее первому приближению ввел *верхние характеристические показатели* решений (ненулевых).

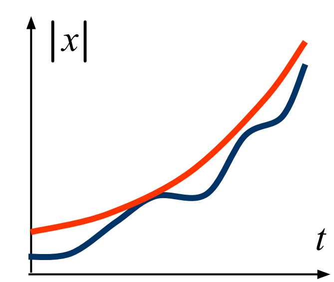
$$\dot{x} = A(t)x + o(x)$$

$$(x \to 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \ge 0)$$

Показатель Ляпунова осуществляет экспоненциальную верхнюю оценку нормы решения.

$$\chi(x) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$$

$$|x(t)| \le C_\varepsilon e^{(\chi(x)+\varepsilon)t} \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$



А.М. Ляпунов (1857–1918, Россия)

Доказал, что в случае *правильной* (в частности, автономной) системы *первого приближения* верно следующее:

$$\dot{x} = A(t)x$$

- если показатели всех ее решений отрицательны, то имеет место экспоненциальная устойчивость;

$$\forall x \quad \chi(x) < 0 \Rightarrow \text{уст.}$$

- если показатель хотя бы одного ее решения положителен, то имеет место неустойчивость.

$$\exists x \quad \chi(x) > 0 \Rightarrow \text{неуст.}$$

А.М. Ляпунов (1857–1918, Россия)

Изучил показатели всех решений *n*-мерной линеаризованной системы (с ограниченными коэффициентами):

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A \in \mathrm{M}^n$$

- всего их оказалось ровно *n* (с учетом кратности);

$$\lambda_1(A) \le \ldots \le \lambda_n(A)$$

- показатель с номером *i* отвечает за условную *i*-устойчивость (с начальными значениями из *i*-мерного многообразия);

$$\lambda_i(A) < 0 \Rightarrow i\text{-уст.}$$

$$\lambda_i(A) > 0 \Rightarrow i\text{-неуст.}$$

- если система автономна, то показатели Ляпунова совпадают с действительными частями собственных значений ее матрицы.

$$A = \mathrm{const} \Rightarrow \lambda_i(A) = \mathrm{Re}\,\alpha_i(A),$$

где $\alpha_i(A) - i$-е собств. зн.

Перрон Оскар (1880–1975, Германия)

В 1913 г. привел пример *точки разрыва* старшего показателя Ляпунова системы как функции от ее коэффициентов.

$\exists A \in \mathcal{M}^n$ (равном. топ.):

λ_n – разрывен в т. A

В результате встал вопрос об описании точек непрерывности (полунепрерывности сверху или снизу) показателей Ляпунова, рассматриваемых:

- как функционалы на пространстве линейных систем (с *равномерной* топологией);

$\lambda_i : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$

- как функции параметра, задающего семейство систем (или на пространстве линейных систем с *компактно-открытой* топологией).

$\lambda_i(A(\cdot,\mu))$

Виноград Роберт Эльюкимович (1924, Россия, Израиль)

В 1957 г. ввел (задал формулами) *центральные показатели*, доказав, что они оценивают сдвиги показателей Ляпунова при равномерно малых возмущениях коэффициентов линейной системы:

$$\Omega, \omega : \mathrm{M}^n \to \mathbb{R}$$

- верхний — оценивает сдвиги вверх старшего показателя Ляпунова;
- нижний — оценивает сдвиги вниз младшего показателя Ляпунова.

$$\Omega(A) \geq \overline{\lim_{B \to A}}\, \lambda_n(B) \equiv \overline{\lambda_n}(A)$$

$$\omega(A) \leq \underline{\lim_{B \to A}}\, \lambda_1(B) \equiv \underline{\lambda_1}(A)$$

Миллионщиков Владимир Михайлович (1939–2009, Россия)

В 1969 г. с помощью своего *метода поворотов*:

- доказал *достижимость* (обратную оценку) центральных показателей показателями Ляпунова при равномерно малых возмущениях коэффициентов линейной системы;
- описал все точки непрерывности всех одновременно показателей Ляпунова линейных систем;
- описал все точки *грубой непрерывности* (в целой окрестности) всех одновременно показателей Ляпунова линейных систем (это системы с интегральной разделенностью);
- доказал, что точки грубой непрерывности показателей всюду плотны в пространстве всех систем.

$$\Omega(A) = \overline{\lim_{B \to A}}\, \lambda_n(B)$$

$$\omega(A) = \underline{\lim_{B \to A}}\, \lambda_1(B)$$

Изобов
Николай Алексеевич
(1940, Белоруссия)

Для старшего показателя Ляпунова:

- в 1976–77 гг. в двумерном случае вычислил его *миноранту* (аналог нижнего центрального показателя), описав тем самым все точки его полунепрерывности снизу;
- в 1978 г. в *n*-мерном случае оценил его миноранту снизу.

$$\underline{\lambda}_n(A) \equiv \varliminf_{B\to A} \lambda_n(B) \quad (n=2)$$

Сергеев
Игорь Николаевич
(1954, Россия)

Для каждого показателя Ляпунова в отдельности:

- в 1980 г. вычислил его *мажоранту* (аналог верхнего центрального показателя), описав тем самым все точки его полунепрерывности сверху;
- в 1993 г. в трехмерном случае вычислил его миноранту, описав тем самым и все точки его полунепрерывности снизу.

$$\overline{\lambda_i}(A) \equiv \overline{\lim_{B \to A}} \lambda_i(B)$$

$$\underline{\lambda_i}(A) \equiv \underline{\lim_{B \to A}} \lambda_i(B) \quad (n = 3)$$

Бэр Рене-Луи (1874–1932, Франция)

В 1899 г. предложил свою *классификацию разрывных функций*:

- нулевой класс Бэра состоит из непрерывных функций;
- если функция представляется, как поточечный предел последовательности функций нулевого класса, то она принадлежит первому классу Бэра;
- если функция представляется, как поточечный предел последовательности функций первого класса, то она принадлежит второму классу Бэра;

и т. д.

$$\mathrm{B}_0(\mathrm{M}^n)$$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

$$\mathrm{B}_1(\mathrm{M}^n)$$

$$\mathrm{B}_2(\mathrm{M}^n)$$

В.М. Миллионщиков (1939–2009, Россия)

С 1980 г. начал применять теорию разрывных функций Бэра к показателям линейных систем, доказав принадлежность:

- каждого показателя Ляпунова — 2-му классу Бэра в равномерной и компактно-открытой топологиях;
- центральных показателей в компактно-открытой топологии:
  - верхнего — 2-му классу Бэра,
  - нижнего — 3-му классу Бэра

(в равномерной топологии оба принадлежат 1-му классу Бэра).

$$\lambda_i, \Omega \in \mathrm{B}_2(\mathrm{M}^n)$$

$$\omega \in \mathrm{B}_3(\mathrm{M}^n)$$

Рахимбердиев Марат Исимгалиевич (1945–2008, Казахстан)

В 1982 г. доказал, что показатели Ляпунова не принадлежат 1-му классу Бэра (ни в равномерной, ни тем более в компактно-открытой топологии) — отсюда стало ясно, что они принадлежат *в точности* 2-му классу Бэра.

$$\lambda_i \in B_2(M^n), \quad B_1(M^n)$$

Ветохин Александр Николаевич (1971, Россия)

В 1995 г.:

- предложил простые *признаки непринадлежности* показателей 1-му классу Бэра в разных топологиях;
- доказал, что для всех показателей Ляпунова в компактно-открытой топологии:
  - мажоранты не принадлежат 1-му классу Бэра,
  - миноранты не принадлежат 2-му классу Бэра.

$$\overline{\lambda}_i \notin \mathrm{B}_1(\mathrm{M}^n)$$

$$\underline{\lambda}_i \notin \mathrm{B}_2(\mathrm{M}^n)$$

Быков Владимир Владиславович (1973, Россия)

В 1996 г. доказал, что в компактно-открытой топологии миноранта старшего показателя Ляпунова принадлежит 3-му классу Бэра (тем самым — в точности 3-му).

$$\underline{\lambda_n} \in B_3(M^n), \quad B_2(M^n)$$

Этот результат:

- ранее был установлен лишь в трехмерном случае (И.Н. Сергеев, 1995 г.) ;
- позднее был распространен на миноранты всех остальных показателей Ляпунова (Е.Е. Салов, 1999 г.).

$$\underline{\lambda_i} \in B_3(M^n), \quad B_2(M^n)$$

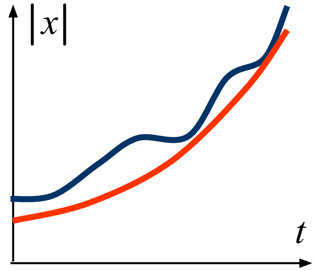
О. Перрон (1880–1975, Германия)

В 1930 г.:

- рассмотрел *нижние характеристические показатели* решений (ненулевых), которые:
  - осуществляют нижние экспоненциальные оценки их нормы,
  - в случае правильной системы совпадают с верхними;
- обнаружил, что количество различных нижних показателей решений одной *n*-мерной системы может быть больше *n* (уже при *n*=2).

$$\pi(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln|x(t)|$$

$$|x(t)| \geq C_\varepsilon e^{(\pi(x)-\varepsilon)t} \qquad (\forall\varepsilon > 0)$$



Н.А. Изобов (1940, Белоруссия)

Показал, что *показатели Перрона* (нижние) устроены гораздо сложнее, чем показатели Ляпунова (верхние):

- количество нижних показателей диагональной системы может достигать $2^n - 1$ (1964 г.);
- множество нижних показателей решений двумерной системы может включать целый отрезок (1965 г.);
- нижние показатели почти всех решений одной системы одинаковы (1968 г.).

Впоследствии было получено полное описание всех возможных множеств нижних показателей (Е.А. Барабанов, 1986 г.).

И.Н. Сергеев (1954, Россия)

В 2004 г.:

- *регуляризовал по Миллионщикову* нижние характеристические показатели, получив ровно *n* показателей Перрона для любой *n*-мерной системы;
- указал мажоранту старшего и миноранту младшего показателей Перрона, которые совпадают с верхним и, соответственно, нижним центральными показателями (нижнепредельными).

$$\pi_1(A) \le \ldots \le \pi_n(A)$$

$$\overline{\pi_n}(A),\ \underline{\pi_1}(A)$$

И.Н. Сергеев (1954, Россия)

В 2004 г. для линейных уравнений *n*-го порядка:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0,$$

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

- ввел *характеристические частоты* решений (ненулевых), задающие среднее число нулей решения (на промежутке длины *π*);

$$\nu(y) \equiv \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu(y,t),$$

где $\nu(y,t)$ — число нулей y на $(0;t]$

- доказал, что *спектр* (множество различных значений) частот автономного уравнения 4-го порядка может содержать сколь угодно большое число значений.

Оказалось, что спектр частот последнего уравнения может даже заполнять целый отрезок (А.Ю. Горицкий, 2008 г.).

$$\nu(\sin t + c\sin\omega t), \quad \omega \notin \mathbb{Q}$$

И.Н. Сергеев (1954, Россия)

В 2004 г., регуляризовав по Миллионщикову характеристические частоты, получил ровно *n* значений для любого уравнения *n*-го порядка и доказал, что они:

$$\omega_1(a) \le \ldots \le \omega_n(a)$$

- в случае автономного уравнения совпадают с модулями мнимых частей корней характеристического многочлена;

$$a = \mathrm{const} \Rightarrow \omega_i(a) = \left|\mathrm{Im}\,\alpha_i(a)\right|,$$

где $\alpha_i(a) - i$-й кор. хар. мн.

- являются разрывными функциями коэффициентов уравнения.

$$\forall i \;\exists a \in \mathrm{E}^n \text{ (равном. топ.)}:$$

ω_i – разрывна в т. a

И.Н. Сергеев (1954, Россия)

В 2009–10 гг., рассмотрев решения (ненулевые) линейных систем:

- распространил на них понятие частоты, определив *полную частоту* решения;
- ввел *показатель блуждаемости* решения (связанный со средней скоростью его вращения);
- доказал, что полные частоты и показатели блуждаемости всех решений автономной системы совпадают с модулями мнимых частей собственных значений ее матрицы.

$$\sigma(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \nu(x, m)$$

$$\rho(x) \equiv \inf_{L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n} \mu(Lx),$$

где

$$\mu(x) \equiv \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right) \right| d\tau$$

Различные показатели ляпуновского типа

Показатели:

- верхние (Ляпунов);
- нижние (Перрон);
- степенные (Демидович);
- неправильности (Перрон, Гробман, Миллионщиков);
- центральные (Виноград);
- особые (Боль), генеральные (Персидский);
- экспоненциальные (Изобов);
- вспомогательные (Миллионщиков);
- блуждаемости, колеблемости (Сергеев).

Классы линейных систем

- Системы с ограниченными коэффициентами (основной класс). M^n
- Системы с неограниченными коэффициентами. M_+^n
- Постоянные, периодические.
- Приводимые, почти приводимые.
- Правильные, бирегулярные.
- Системы с интегральной разделенностью.
- Системы, отвечающие уравнениям. E^n
- Управляемые, с обратной связью.
- Гамильтоновы.

Топологии
и классы возмущений

Топологии (на полуоси):

- равномерная;
- сходимости на компактах (компактно-открытая);
- интегральная;
- сходимости в среднем.

Возмущения:

- экспоненциальные;
- бесконечно малые;
- заданного порядка малости;
- не выводящие из заданного класса систем.

Возможные темы научных работ по линейным системам

- Найти формулу для мажоранты старшего показателя Ляпунова двумерной системы с неограниченными коэффициентами.
- Предъявить двумерную систему без интегральной разделенности, но с грубо устойчивым старшим показателем Ляпунова.
- Существует ли такая трехмерная система, что для любой пары двумерных подпространств ее решений наибольший показатель Перрона в первом из них больше наименьшего — во втором?
- Описать все возможные спектры полных частот или показателей блуждаемости произвольного уравнения третьего порядка.
- Существует ли характеристика вектор-функции, принимающая на решениях любой n-мерной системы не более n значений, совпадающих в случае автономной системы с мнимыми частями (по модулю) собственных значений ее матрицы?

Возможные темы научных работ по классам Бэра

- Какому классу Бэра принадлежит миноранта старшего показателя Ляпунова, рассматриваемая как функционал на пространстве систем с неограниченными коэффициентами с компактно-открытой топологией? $\underline{\lambda}_n : M^n \to \mathbb{R}$
- Существует ли такое семейство систем, коэффициенты которых непрерывно зависят от вещественного параметра, что старший показатель Ляпунова, как функция параметра, не является полунепрерывным снизу ни в одной точке?
- Какому классу Бэра принадлежат частоты уравнения (не считая младшей)? $\omega_2(a),\ldots,\omega_n(a)$
- Какому классу Бэра принадлежат показатели Перрона (не считая старшего)? $\pi_1(A),\ldots,\pi_{n-1}(A)$

Учебники и монографии по теории показателей Ляпунова