

ДВИЖЕНИЕ ЗВЕЗД В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ С КОНСЕРВАТИВНЫМ ОБМЕНОМ МАСС

Лукьянов Л.Г.
Гасанов С.А.
Медведева А.А.

ГАИШ МГУ

общая формулировка задачи

ОГРАНИЧЕННАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Для определения движения перетекающих частиц массы используем плоскую ограниченную эллиптическую задачу трех тел, уравнения движения которой во вращающейся и пульсирующей барицентрической системе координат Шапнера (Шайбнера, Петра, Нехвила, Рейн) x, y имеют вид [10]

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} &= \rho \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} &= \rho \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5)$$

где ось x всегда направлена на звезду-аккретор S_2 , v — истинная аномалия звезд, $\rho = 1/(1 + e \cos v)$ — безразмерный радиус положения звезды S_2 относительно S_1 . Через U обозначена функция Якоби в ограниченной эллиптической задаче трех тел

$$U = \frac{x^2 + y^2}{2} + p^3 \left(\frac{1 - m}{r_1} + \frac{m}{r_2} \right) + \frac{p^2}{2} (3 + m^2 - m), \quad (6)$$

а r_1 и r_2 — расстояния от частицы перетекающей струи соответственно до центров масс первой и второй звезд

$$r_1 = \sqrt{(x + pm)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + pm - p)^2 + y^2}, \quad (7)$$

где $1 - m = M_1/M$ и $m = M_2/M$ — относительные массы звезд, $p = a(1 - e^2)$ — фокальный параметр орбиты звезд, a и e — большая полуось и эксцентриситет орбиты соответственно.

Истечение вещества со звезды-донора происходит через окрестность внутренней особой точки Эйлера L_1 , абсцисса x_L которой заключена в пределах $-pt < x_L < p - pt$ и определяется численно как корень нелинейного уравнения $\partial U/\partial x = 0$ при $y = 0$, т.е. уравнения

$$x - p^3 \left(\frac{1 - m}{\sqrt{x + pt}} + \frac{m}{\sqrt{x + pt - p}} \right) = 0. \quad (8)$$

Полости Роша в плоской эллиптической ограниченной задаче трех тел определяются при помощи уравнений кривых минимальной энергии [11]

$$x^2 + y^2 + 2p^3 \left(\frac{1 - m}{r_1} + \frac{m}{r_2} \right) - p^2(3 + m^2 - m) = C(1 + e \cos v), \quad (9)$$

где C — постоянная Якоби.

Будем считать, что принимающая звезда имеет форму сферы

$$(x + pt - p)^2 + y^2 = \frac{P^2}{\rho^2}, \quad (10)$$

радиус P которой в процессе перетекания вещества изменяется согласно зависимости

$$P = P_0 \sqrt[3]{\frac{m}{m_0}}. \quad (11)$$

Истечение вещества со звезды-донора начинается по достижении уровня энергии частиц, превышающего уровень энергии в особой точке Эйлера L_1 . Как показано в работе [11], истечение вещества через окрестность точки L_1 носит пульсирующий характер и происходит в окрестности апоастро орбит звезд. Скорость истечения V_0 частиц массы со звезды S_1 всегда направлена в сторону звезды S_2 , образуя с осью Ox некоторый угол $\pm \alpha$ и имеет значение

$$V_0(v) = V_{00} V_1(v) \beta, \quad V_1(v) = m \sqrt{\frac{GM}{p} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}, \quad (12)$$

где $V_{00} \simeq 0.03$ — коэффициент установленный из наблюдений, а положительный параметр β характеризует структуру звезды-аккретора, т.е. зависит от ее химического состава и физического состояния. Окрестность апоастро звезд, в которой происходит истечение массы, определяется по уровню энергии частиц (постоянной Якоби C , см. [11]) диапазоном истинной аномалии $\pi - v_a \leq v \leq \pi + v_a$, где $0 < v_a < \pi$. Поэтому среднюю скорость V_c истечения массы со звезды S_1 на одном периоде обращения звезд можно определить по формуле

$$V_c = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-v_a}^{\pi+v_a} V_0 dv = \frac{2\beta V_{00} m}{\pi} (1 + e_0) \sqrt{\frac{GM}{p_0}} \left[E \left(\frac{2\sqrt{e_0}}{1 + e_0} \right) - E \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{e_0}}{1 + e_0} \right) \right] \quad (13)$$

Здесь $p_0 = a_0(1 - e_0^2)$, где a_0, e_0 – начальные значения большой полуоси и эксцентриситета орбиты звезды-аккретора. Кроме того, $E(k), E(s, k)$ – полный эллиптический интеграл и эллиптический интеграл II рода соответственно.

Все линии тока струи, имеющие разброс как по координатам так и по времени в течении одного "выброса" вещества за период обращения звезд, будем аппроксимировать одной траекторией, исходящей из особой точки L_1 . Численное интегрирование уравнений (5) проводится с начальными условиями:

$$\begin{aligned} v_0 = \pi, \quad x(v_0) = x_L, \quad x'(v_0) = \frac{V_c}{\dot{v}(v_0)} \cos \alpha, \quad y(v_0) = 0, \quad y'(v_0) = \frac{V_c}{\dot{v}(v_0)} \sin \alpha, \\ v_a = \frac{\pi}{2}, \quad m = m_0, \quad \dot{m} = \text{const}, \quad P = P_0, \quad \dot{v}(v_0) = \sqrt{\frac{GM}{p_0^3}} (1 - e_0)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где "штрих" – означает дифференцирование по истинной аномалии v .

В начальных условиях угол α между скоростью и осью абсцисс меняется в пределах $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, а параметр β – в пределах $0.5 < \beta < 2$. $\alpha = [0^\circ, \pm 20^\circ, \pm 40^\circ, \pm 60^\circ, \pm 80^\circ]$, $\beta = [0.5, 1, 1.5, 2]$. В работе (Л. Лукьянова, С. Гасанова, 2010) значения угла α и параметра β принимались равными $\alpha = 0$ и $\beta = 1$.

Численное интегрирование осуществляется на интервале $v_0 \leq v \leq v_0 + \tau$, где значение истинной аномалии $v_0 + \tau$ определяется моментом попадания частицы на поверхность второй звезды в точке $x_2 = x(v_0 + \tau), y_2 = y(v_0 + \tau)$. Если такого момента не существует, то процесс перетекания вещества происходит с образованием аккреционного диска.

В результате численного интегрирования уравнений (5) получаются компоненты скорости истечения W_1 со звезды S_1 и скорости притока массы W_2 на звезду S_2 :

$$W_{1x} = V_c, \quad W_{1y} = 0, \quad W_{2x} = x'(v_0 + \tau)\dot{v}, \quad W_{2y} = y'(v_0 + \tau)\dot{v}. \quad (15)$$

Реактивные силы, действующие на звезды S_1 и S_2 , считаются приложенными к их центрам масс и определяются по формулам

$$Q_1 = \dot{m}M\{-V_c, 0\}, \quad Q_2 = \dot{m}M\{x'(v_0 + \tau)\dot{v}, y'(v_0 + \tau)\dot{v}\}. \quad (16)$$

С помощью численного интегрирования определяются также масса установившейся перетекающей струи S_3 и координаты x_3, y_3 ее центра масс:

$$M_3 = \frac{\tau}{\dot{v}_c}\dot{m}M, \quad x_3 = \frac{1}{\tau} \int_{v_0}^{v_0+\tau} x(v)dv, \quad y_3 = \frac{1}{\tau} \int_{v_0}^{v_0+\tau} y(v)dv, \quad (17)$$

где

$$\dot{v}_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{v} dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{p^3}} (1 + e \cos v)^2 dv = \sqrt{\frac{GM}{p^3}} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$$

— средняя угловая скорость орбитального движения.

По формулам (16) и (17) определяются реактивные силы, масса струи и координаты ее центра масс. Эти величины входят в правые части дифференциальных уравнений движения звезд.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕЗД

В качестве исходных дифференциальных уравнений движения звезд в инерциальной системе координат будем рассматривать систему уравнений Мещерского:

$$\begin{aligned} M_1 \frac{d\mathbf{V}_1}{dt} &= G \frac{M_1 M_2}{R^3} \mathbf{R} + \mathbf{Q}_1 + G \frac{M_1 M_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13}, \\ M_2 \frac{d\mathbf{V}_2}{dt} &= -G \frac{M_1 M_2}{R^3} \mathbf{R} + \mathbf{Q}_2 + G \frac{M_2 M_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $r_{13} = \sqrt{(x_3 + pm)^2 + y_3^2}$, $r_{23} = \sqrt{(x_3 + pm - p)^2 + y_3^2}$ — расстояния между центрами масс звезд и струи. Рассматриваем плоскую задачу. Уравнение движения звезды S_2 относительно S_1 отсюда получается в виде

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{GM}{R^3} \mathbf{R} + \frac{\mathbf{Q}_2}{M_2} - \frac{\mathbf{Q}_1}{M_1} + GM_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} \right), \quad (19)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ — скорость движения звезды S_2 относительно S_1 .

Дифференциальные уравнения Ньютона-Эйлера в оскулирующих элементах для большой полуоси относительной орбиты a и эксцентриситета e представляются в виде [10]:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{\sqrt{GMa(1-e^2)}} [e \sin v S + (1 + e \cos v) T], \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{GM}} \left[\sin v S + \left(\cos v + \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v} \right) T \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Возмущающие ускорения S и T становятся известными после интегрирования уравнений (5):

$$\begin{aligned} S &= \dot{m} \left(\frac{W_{2x}}{m} + \frac{V_c}{1-m} \right) + GM\tau \frac{\dot{m}}{\dot{v}_c} \left(\frac{x_3 + pm - p}{r_{23}^3} - \frac{x_3 + pm}{r_{13}^3} \right), \\ T &= \dot{m} \frac{W_{2y}}{m} + GM\tau \frac{\dot{m}}{\dot{v}_c} y_3 r_3, \quad r_3 = \frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{31}^3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Если перейти к независимой переменной m по формуле $\frac{d}{dt} = \dot{m} \frac{d}{dm}$, то после проведения вычисления осреднения путем вычисления определенных интегралов от правых частях уравнений (20), получим окончательный вид дифференциальных уравнений для определения вековых возмущений большой полуоси и эксцентриситета

определитель определит знак Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 + e^{-2\theta} \tilde{W}_q \\ &= \frac{2 + e^{-2\theta} \tilde{W}_q}{1 - e^{-2\theta}} \cdot \frac{1 - e^{-2\theta}}{1 - e^{-2\theta}} = \frac{2 + e^{-2\theta} \tilde{W}_q}{1 - e^{-2\theta}} \cdot \frac{1 - e^{-2\theta}}{1 - e^{-2\theta}} \end{aligned}$$

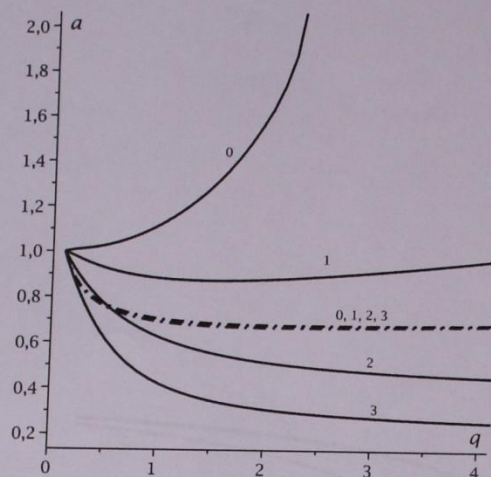
(22)

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2 + e^{-2\theta} \tilde{W}_q}{1 - e^{-2\theta}} \cdot \frac{1 - e^{-2\theta}}{1 - e^{-2\theta}} \\ &= \frac{2 + e^{-2\theta} \tilde{W}_q}{1 - e^{-2\theta}} \cdot \frac{1 - e^{-2\theta}}{1 - e^{-2\theta}} \end{aligned}$$

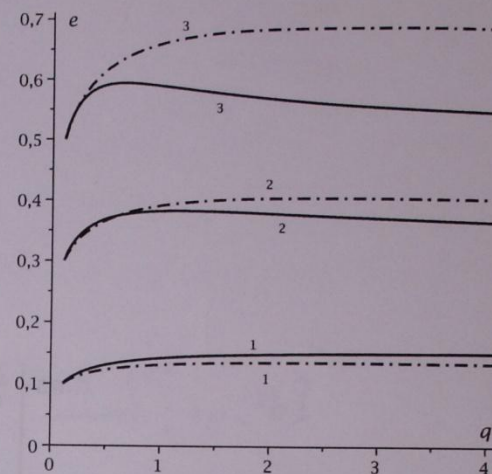
Здесь определено обозначение $\tilde{W}_q = \sqrt{(1 + e^{-2\theta}) \cos^2 \theta - 1}$ тогда \tilde{W}_q имеет значения

$$\tilde{W}_q = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

ГРАФИКИ С УЧЕТОМ РЕАКТИВНЫХ СИЛ (сплошная линия) И БЕЗ (пунктир)



(a)



(b)

Рис. 5: Графики функций: (a) — $a(q)$ и (b) — $e(q)$ для $a_0 = 1$ и $P_0 = 0.0758$. Обозначения: 0 — $e_0 = 0$, 1 — $e_0 = 0.1$, 2 — $e_0 = 0.3$, 3 — $e_0 = 0.5$. Сплошные кривые соответствуют отсутствию аккреционного диска, а штрихпунктирные — его наличию.

▣ 1. Определение траекторий перетекания СТРУИ с учетом разброса:

а) при изменении величины начальной скорости

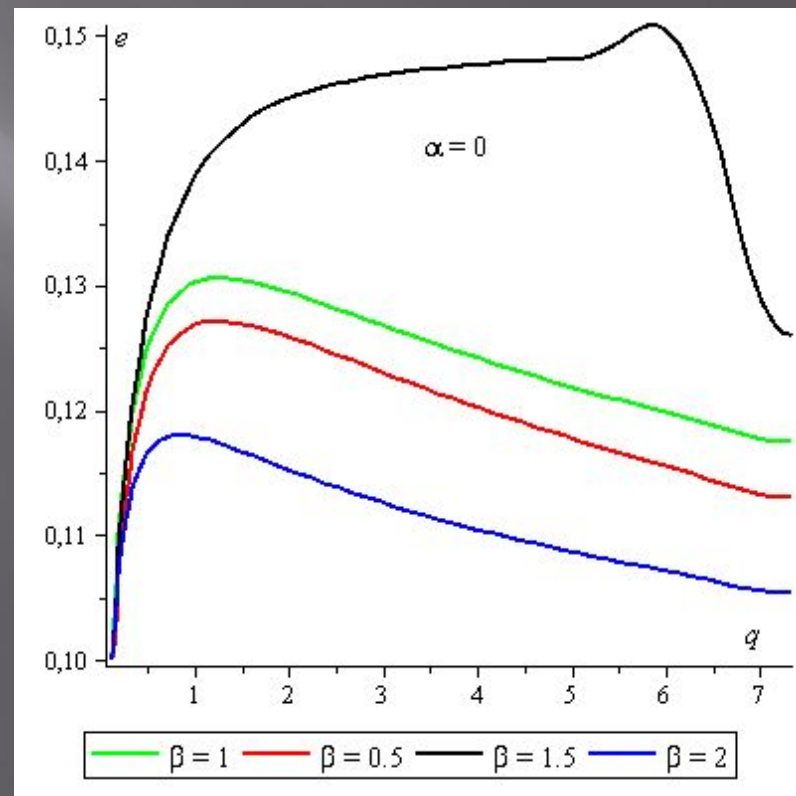
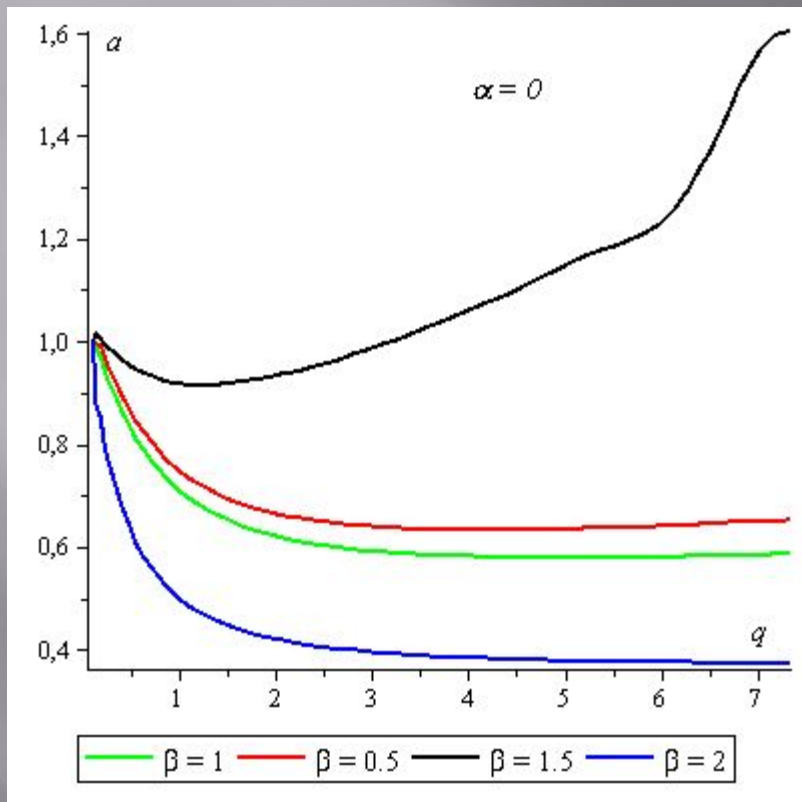
$$V_0 = \beta V_{00} V_1(v), \beta = 1, 0.5, 1.5, 2$$

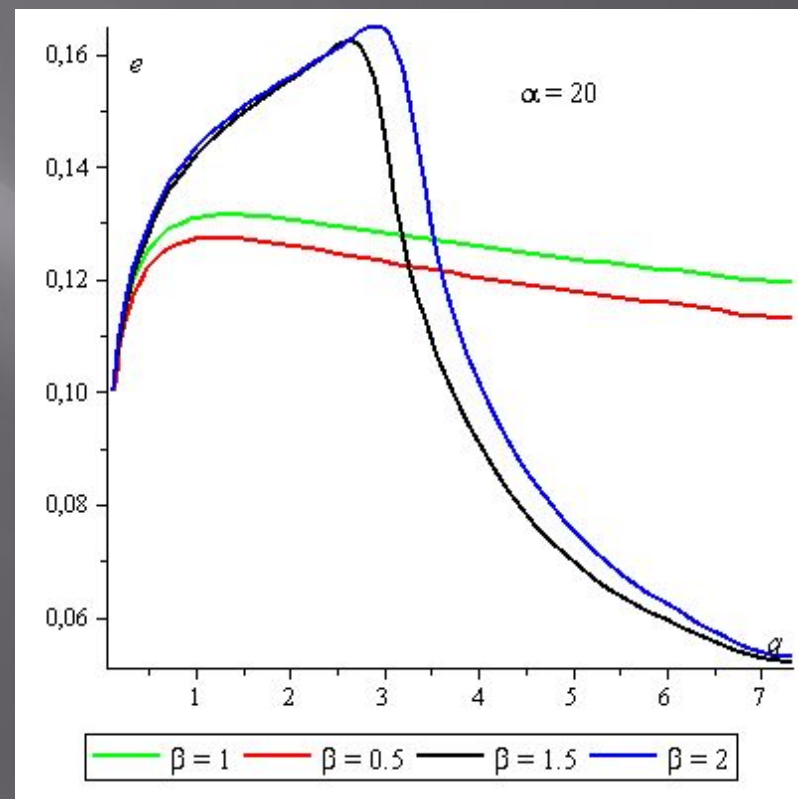
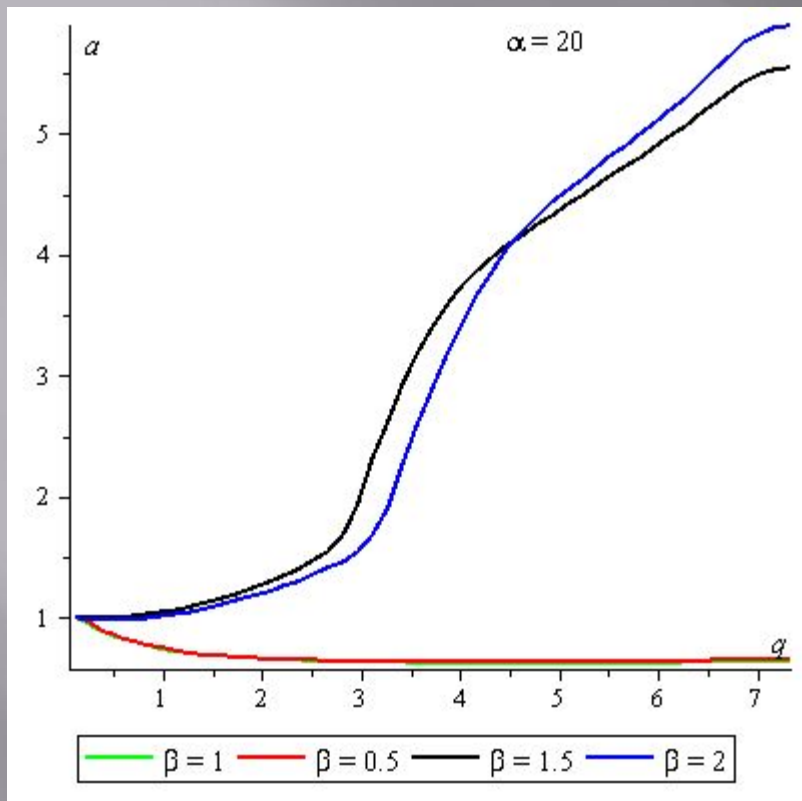
б) при изменении угла наклона начальной скорости ($\alpha = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, -20^\circ, -40^\circ, -60^\circ, 80^\circ$)

▣ 2. Определение изменений a и e относительной орбиты S2 при новом условии: учитывается только составляющая реактивной силы, направленной в центр масс звезды S2.

Часть 1(а)

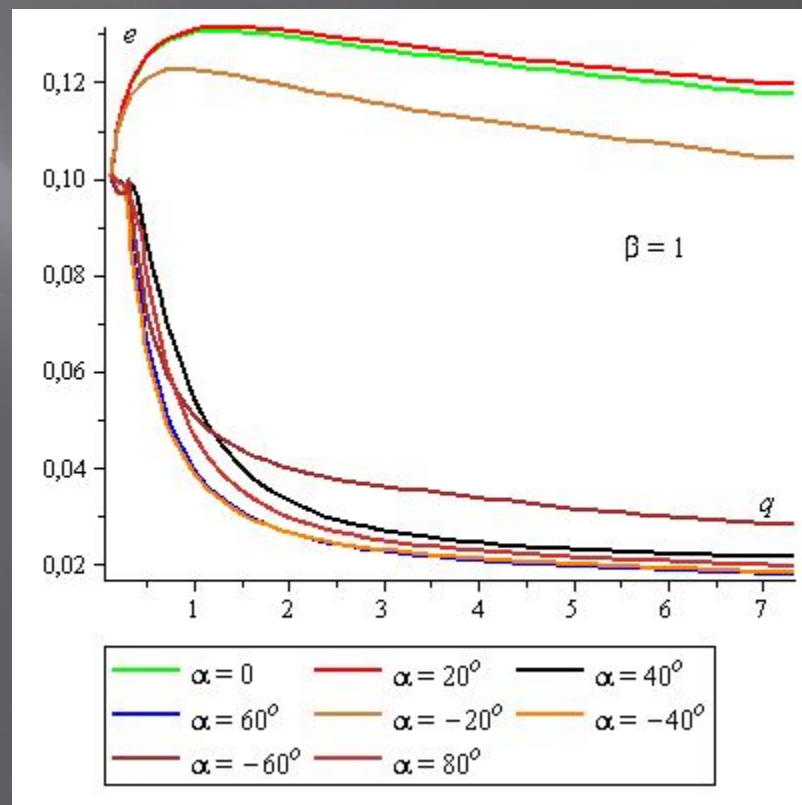
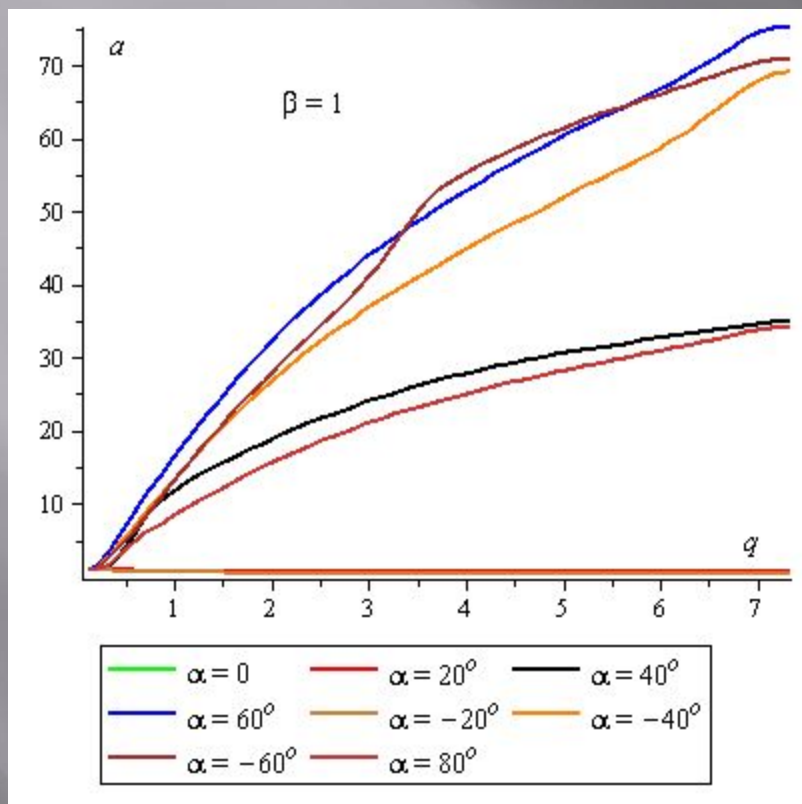
Определение траекторий перетекания СТРУИ с учетом разброса: при изменении величины начальной скорости $V_0 = \beta V_{00} V_1(v)$, $\beta = 1, 0.5, 1.5, 2$.

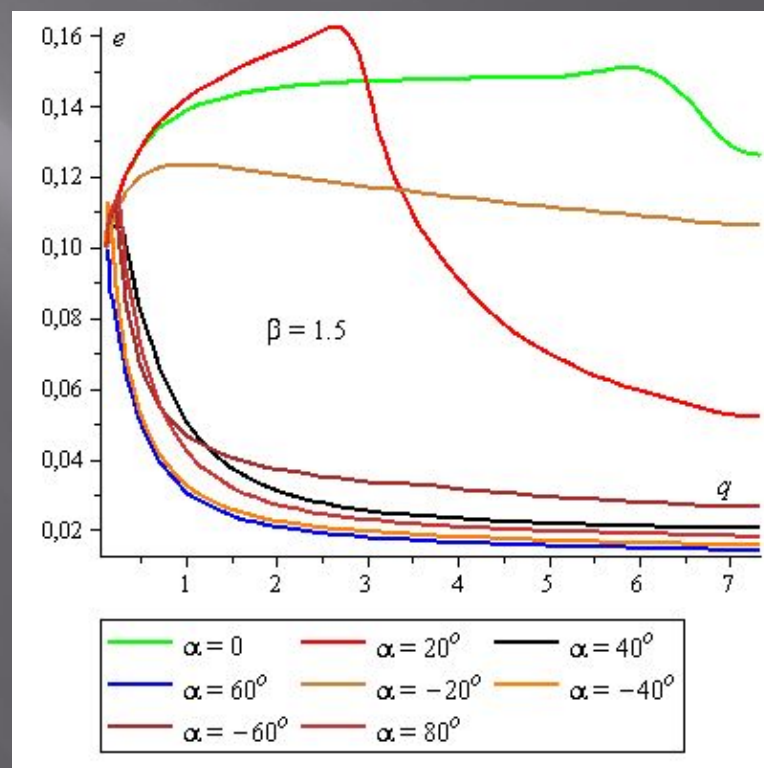
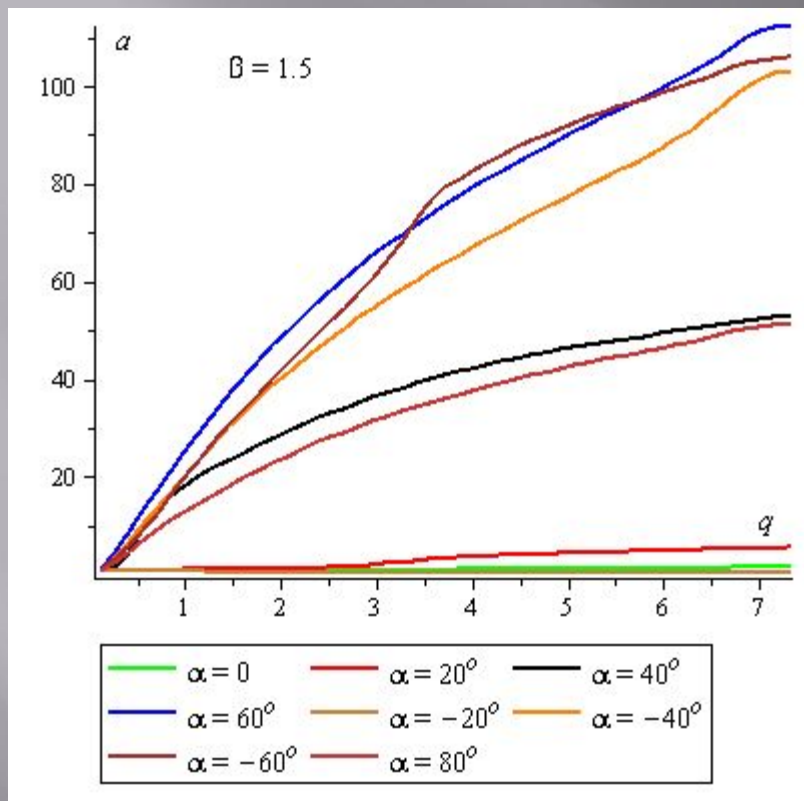




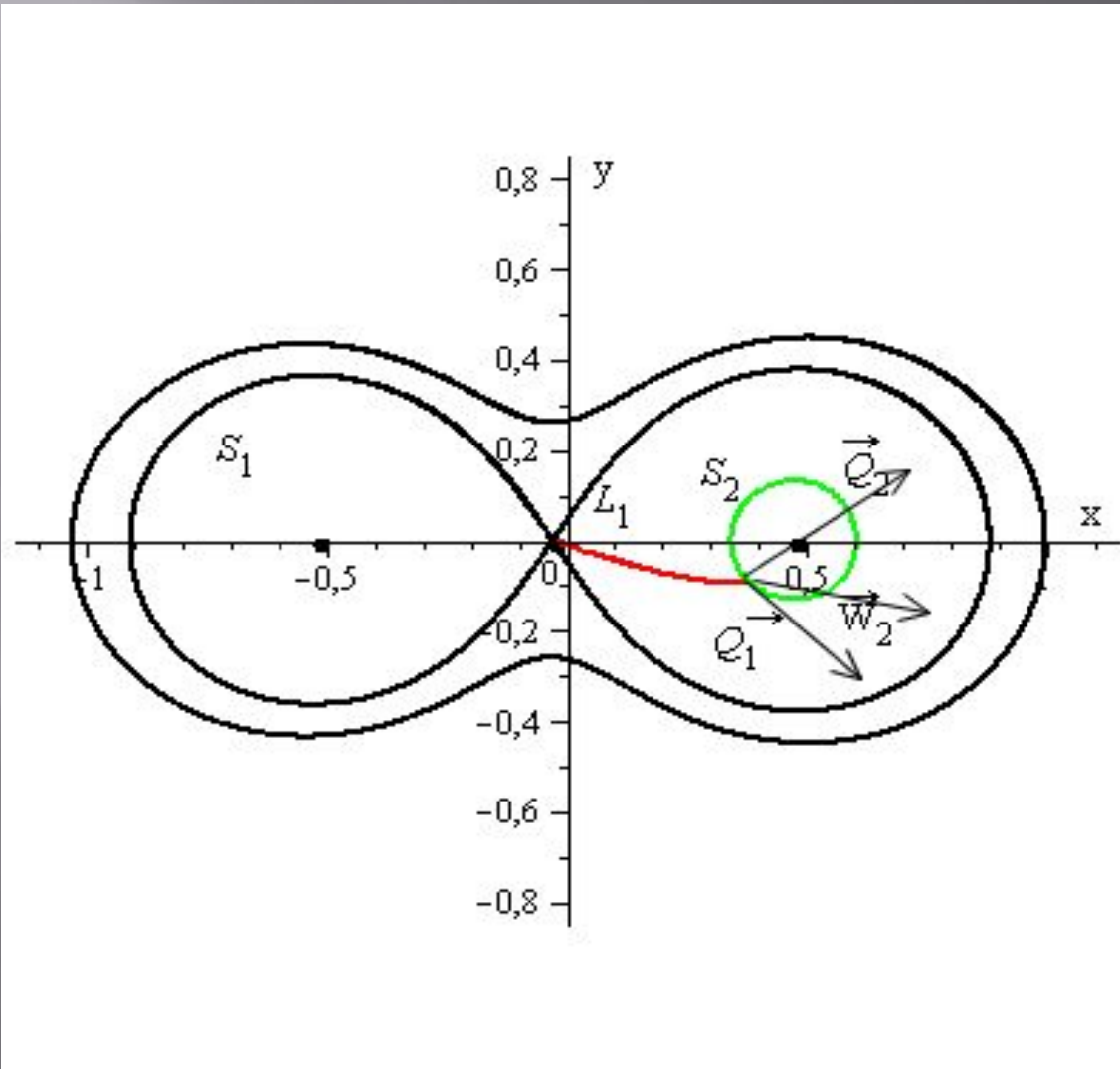
Часть 1(б)

Определение траекторий перетекания СТРУИ с учетом разброса:
при изменении угла наклона начальной скорости ($\alpha = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, -20^\circ, -40^\circ, -60^\circ, 80^\circ$)



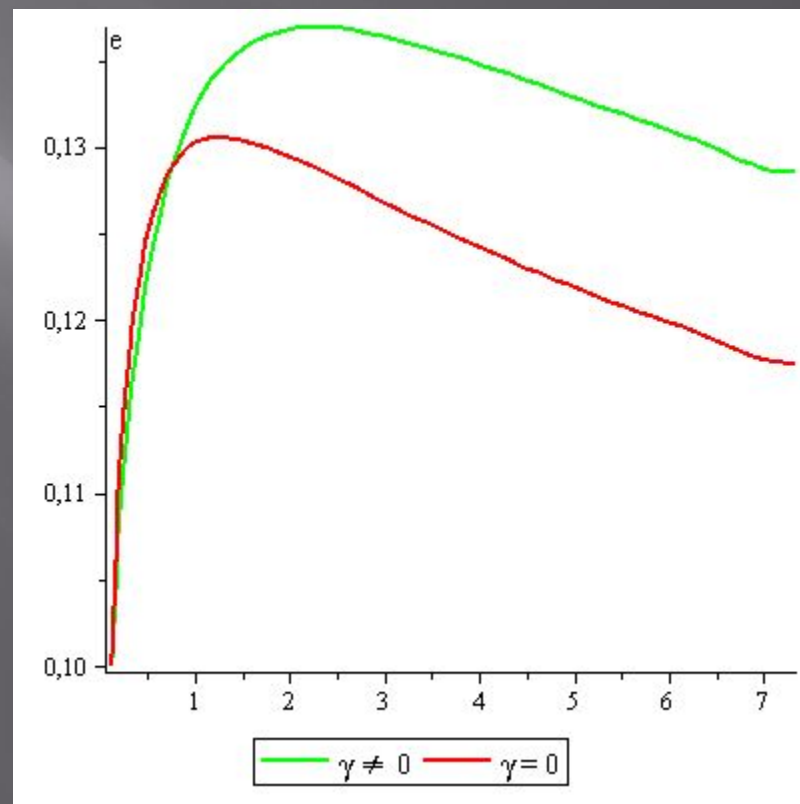
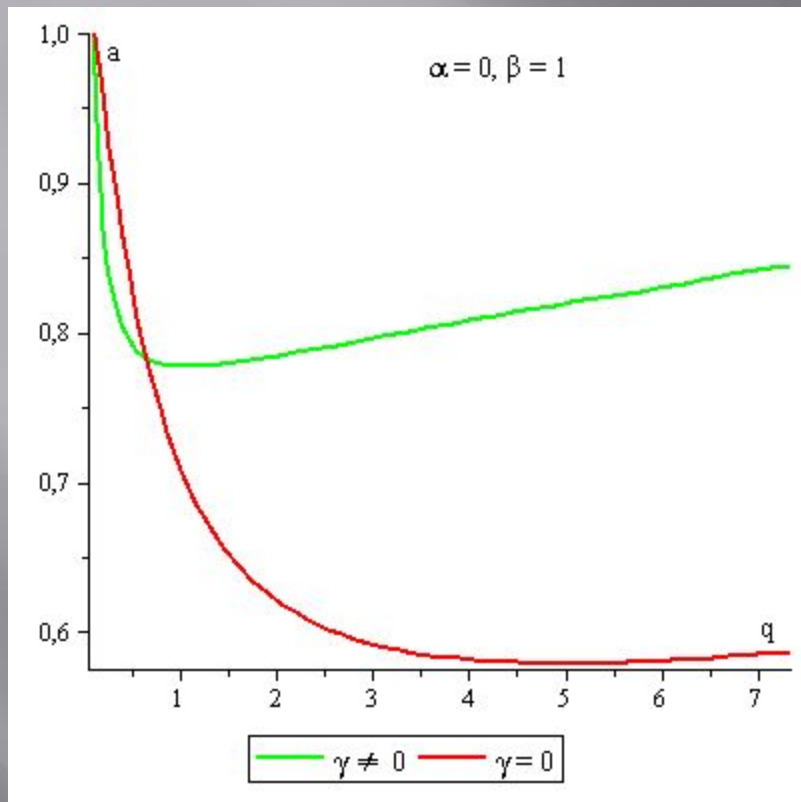


Процесс перетекания вещества.



Часть 2

Определение изменения a и e относительной орбиты S2 при новом условии: учитывается только составляющая реактивной силы, направленной в центр масс звезды S2.



ПЕРСПЕКТИВЫ

- ▣ 1. СЧИТАЛОСЬ, ЧТО ЗВЕЗДЫ ДВИЖУТСЯ ПО КРУГОВОЙ ОРБИТЕ И ИСПОЛЬЗОВАЛАСЬ ЗАВИСИМОСТЬ ПАЧИНСКОГО-ХУАНГА. ТОЛЬКО В НАЧАЛЕ 2000Х ГОДОВ ПОЯВИЛИСЬ НОВЫЕ РАБОТЫ (СЕПИНСКИЙ И ДР), В КОТОРЫХ ДВИЖЕНИЕ ЗВЕЗД СЧИТАЕТСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ.
- ▣ 2. ПРЕДПОЛАГАЛИ, ЧТО ТЕСНЫЕ ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДНЫЕ СИСТЕМЫ ОБРАЗУЮТ ЗАМКНУТУЮ МЕХАНИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ, Т.Е. СИСТЕМУ ДОПУСКАЮЩУЮ ИНТЕГРАЛЫ КОЛ-ВА ДВИЖЕНИЯ И МОМЕНТА КОЛ-ВА ДВИЖЕНИЯ, ЧТО НЕКОРРЕКТНО.
- ▣ 3. НИ ОДИН ИЗ АВТОРОВ НЕ УЧИТЫВАЕТ ВЛИЯНИЕ РЕАКТИВНЫХ СИЛ ОТ СТРУИ. НАМИ ПОКАЗАНО (СМ РИСУНКИ), ЧТО РЕАКТИВНЫЕ СИЛЫ НА ДВИЖЕНИЕ ЗВЕЗДЫ ВСЕ ТАКИ ВЛИЯЮТ.