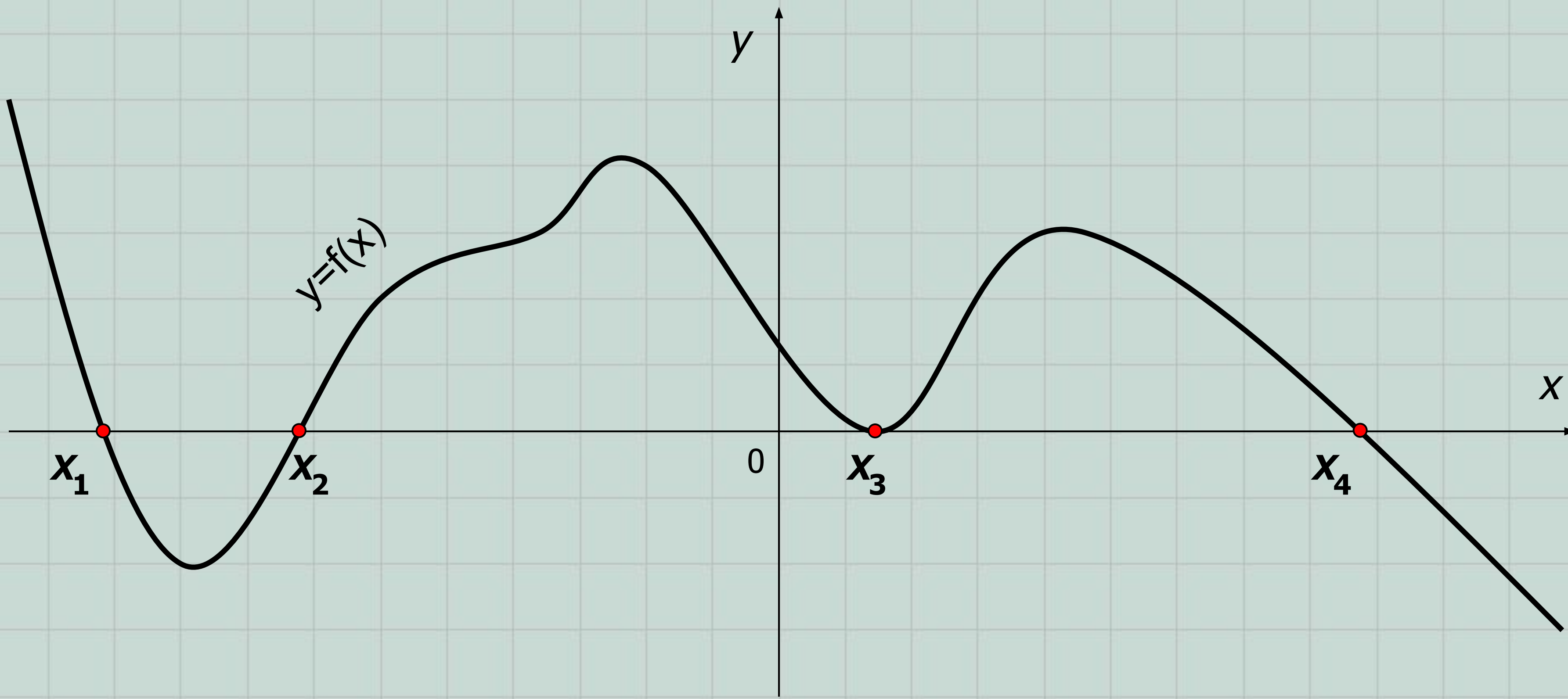
Решение неравенств методом интервалов.

Алгебра и начала анализа,

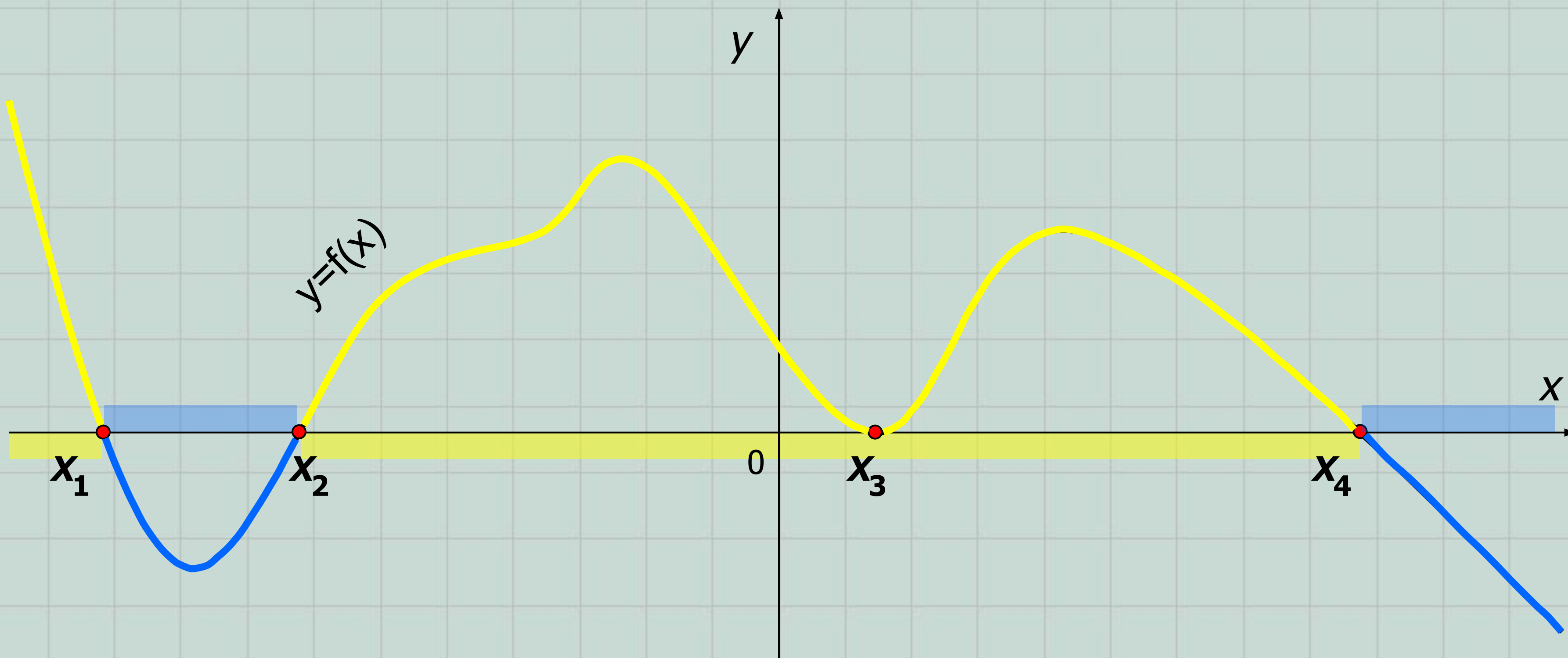
10 класс.

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Пусть графиком функции y=f(x) является некоторая гладкая кривая:



Очевидно, что D(f)=E(f)=□. Обратим свое внимание на значения аргумента $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4}$ – в этих точках график функции пересекает ось Ox или касается её. Это – так называемые *нули функции* (ординаты этих точек равны 0, т.е. f(x_1)= f(x_2)= f(x_3)= =f(x_4) =0). Аналитически их можно найти, решая уравнение f(x)=0.



Точки $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ разбивают область определения функции D(f) на промежутки знакопостоянства, т.е. промежутки, на которых функция имеет либо положительные значения ($f(x)>0$), либо отрицательные ($f(x)<0$). В нашем случае:

$f(x)>0$, при $x\in(-\infty; x_1)\cup(x_2; x_3)\cup(x_3; x_4)$ и

$f(x)<0$, при $x\in(x_1; x_2)\cup(x_4; +\infty)$.

Опираясь на эту геометрическую иллюстрацию, мы можем вывести алгоритм решения неравенств, получивший название «метод интервалов».

Методом интервалов можно решить любое неравенство вида: f(x)□0. При решении придерживаются следующей схемы (перепишите её в тетрадь!):

1) Найти D(f);
2) Найти нули функции, решая уравнение f(x)=0;
3) Отметить на D(f) все полученные нули;
4) Определить знак функции на каждом полученном промежутке;
5) Записать ответ, выбрав промежутки с соответствующим знаком.

Проиллюстрируем данную схему на нескольких примерах.

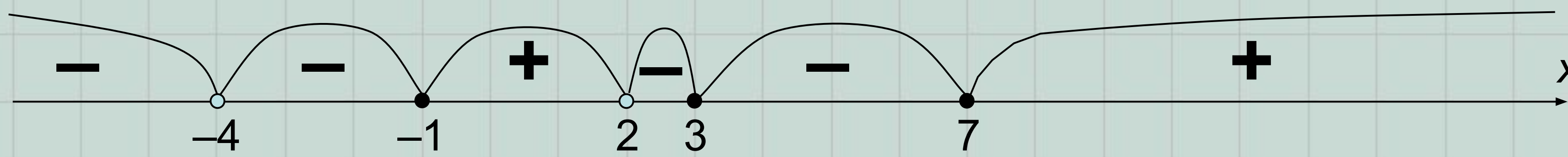
Пример 1. Решите неравенство $\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0$.

Решение. Под функцией f(x) следует понимать выражение в левой части неравенства. Это дробно-рациональная функция.

1) D(f)=□, кроме x= – 4; 2 (данные значения обращают знаменатель в нуль) .

2) Найдем нули функции. Значение дроби равно нулю, если числитель этой дроби равен нулю, т.е. $x = -1; 3; 7$ – нули функции.

3) Обратите внимание, что *точки разрыва* функции (–4 и 2) ***всегда*** на числовой прямой будут пустыми (или «выколотыми»), а нули функции – в зависимости от знака неравенства (если знак неравенства строгий, то точки пустые, если нестрогий, то обычные).



4) Для расстановки знаков на полученных промежутках можно поступить так:

■ разложить левую часть неравенства на линейные множители (как в нашем случае); тогда на крайнем справа промежутке знак определяется комбинацией угловых коэффициентов этих линейных множителей (в нашем случае все коэффициенты равны 1, т.е. получается комбинация $\frac{+++}{++} > 0$);

■ на остальных промежутках (двигаемся от крайнего справа промежутка влево) знаки расставляются по правилу: знак по сравнению с предыдущим меняется, если показатель степени линейного множителя нечетный и не изменяется, если показатель степени линейного множителя четный. В нашем случае получается… (см.рис.).

$$\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4}$$

Вышеизложенный метод определения знаков на интервалах по сути опирается на понятие «кратных» корней. Если Вам этот термин не знаком, то можно воспользоваться другим способом:

■ выбирая из каждого промежутка любое значение, подставляют в формулу, задающую данную функцию и определяют по полученной комбинации знак функции на <u>каждом</u> промежутке:

$$f(x)=\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4}$$

а) –5∈(–□; –4) ⇒ f(–5)= $\frac{+--}{-+}<0$;

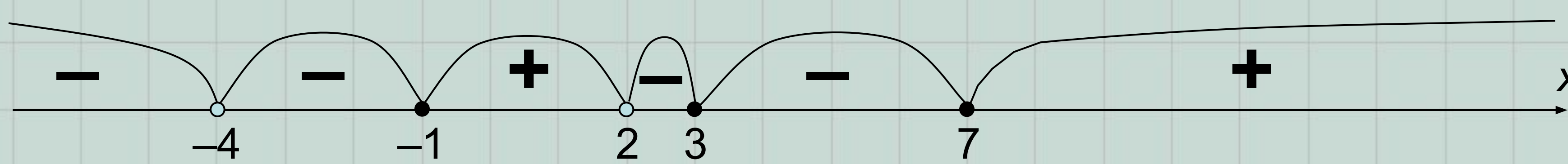
б) –2∈(–4; –1) ⇒ f(–2)= $\frac{+--}{-+}<0$;

в) 0∈(–1; 2) ⇒ f(0)= $\frac{+-+}{-+}>0$;

г) 2,5∈(2; 3) ⇒ f(2,5)= $\frac{+-+}{++}<0$;

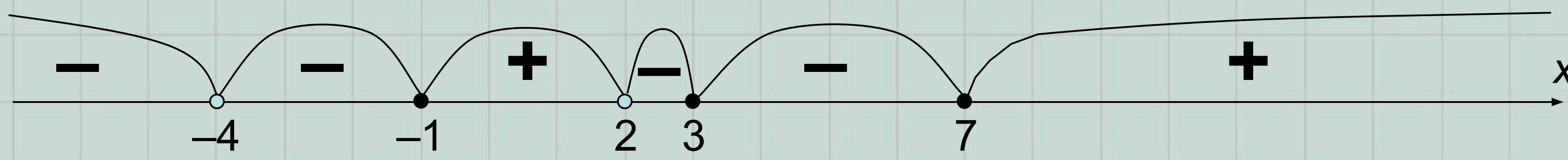
д) 4∈(3; 7) ⇒ f(4)= $\frac{+-+}{++}<0$;

е) 8∈(7; +□) ⇒ f(8)= $\frac{+++}{++}>0$;



Как Вы можете убедиться – результат расстановки знаков такой же, как в предыдущем способе.

5) Остается записать ответ, выбрав промежутки соответствующие знаку неравенства. В нашем случае, знаку «≥» соответствуют промежутки со знаком «+». Важно не забыть x=3!!!



Ответ: $x \in [-1;\ 2) \cup \{3\} \cup [7;\ +\infty)$.

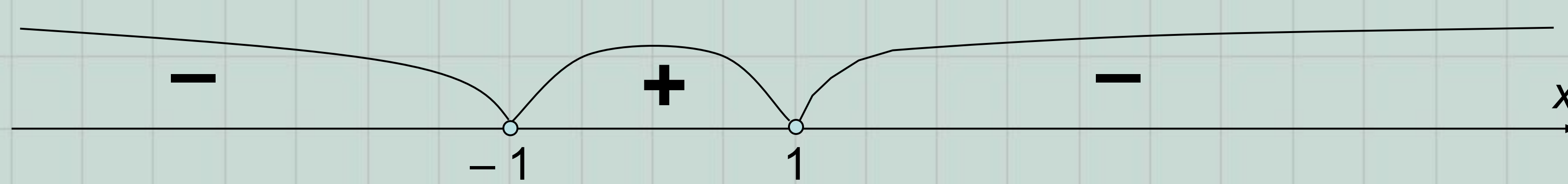
Пример 2. Решите неравенство $\dfrac{x+3}{1-x} > \dfrac{x-4}{x+1}$.

Решение. Перенесем все в левую часть неравенства: $\dfrac{x+3}{1-x} - \dfrac{x-4}{x+1} > 0.$

1) D(f)=$\mathbb{R}$, кроме x= – 1; 1, где f(x)= $\dfrac{2x^2 - x + 7}{(1-x)(x+1)}$;

2) Нулей функции нет, т.к. дискриминант квадратного трехчлена отрицательный;

3)



4) Проверьте себя, как Вы поняли правило расстановки знаков…

5) Ответ: $x\in(-1;$
$1)$.

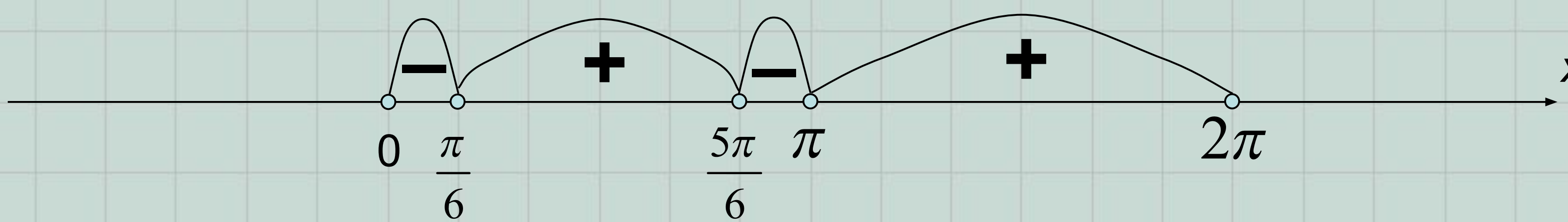
Пример 3. Решите неравенство $\sin x+\cos(2x)>1$.

Решение. Перепишем неравенство в виде: $\sin x>1-\cos(2x)$. Используя формулы половинного аргумента, получим: $\sin x>2\sin^2 x$ или $2\sin^2 x-\sin x<0$.

1) D(f)=□, где $f(x)=2\sin^2 x-\sin x$;

2) $2\sin^2 x-\sin x=0;\ \Rightarrow\ x=\pi n,\quad x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad n,k\in\mathbf{Z};$

3) Расставим полученные нули функции на числовой прямой:



Учитывая периодичность функции y=sinx, достаточно ограничиться отрезком длиной 2π;

4) Расставим знаки на полученных промежутках;

5) Запишем ответ:

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi n<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n, \\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\pi+2\pi k, \end{array}\right. \quad \text{или}\quad x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\pi+2\pi k\right),\quad n,k\in\mathbf{Z}.$$