Рівняння та нерівності з параметрами

Множини точок на площині

Побудувати на площині множину точок, задану рівнянням:

$$\left|\left||x|-3\right|+|y|-3\right|=1$$

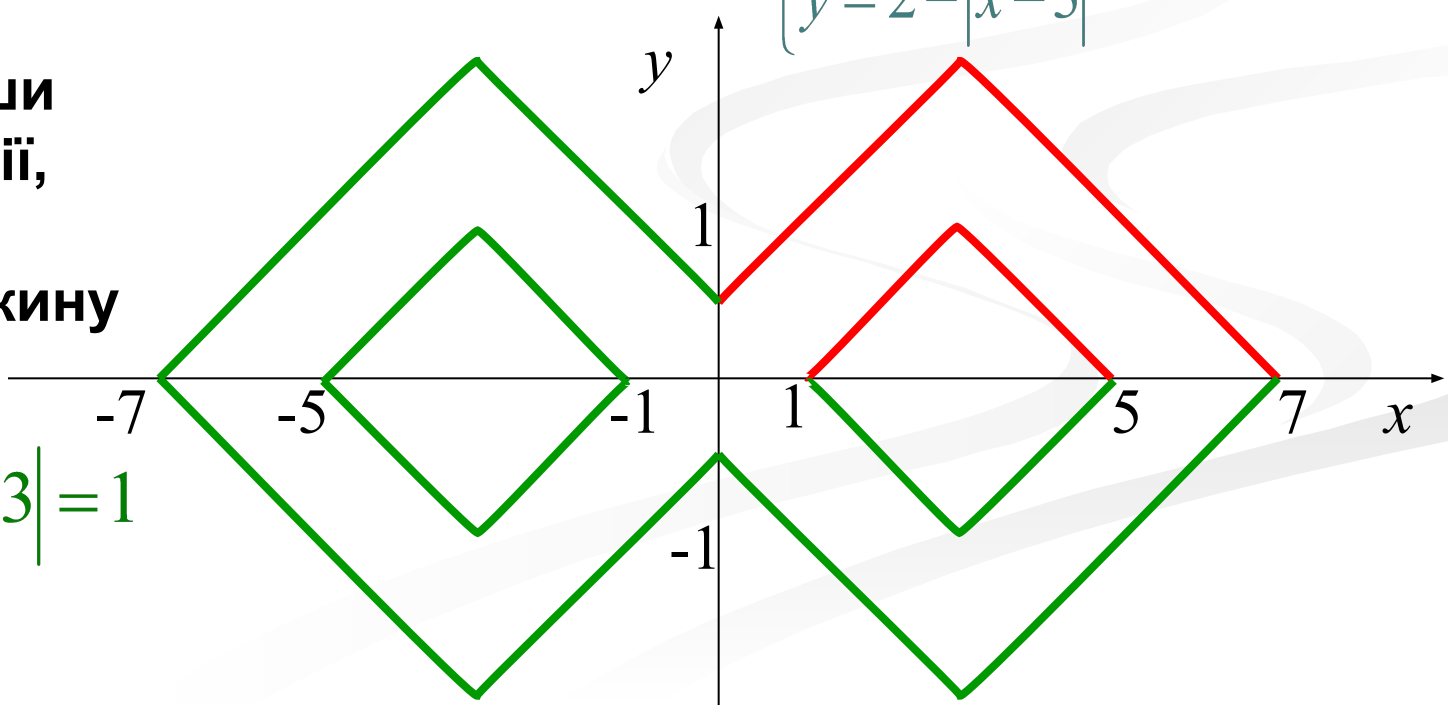
Відмітимо, що графік симетричний відносно осей координат.

Для I четверті система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} y=4-|x-3| \\ y=2-|x-3| \end{cases}$$

Відобразивши отримані лінії, отримаємо шукану множину точок

$$\left|\left||x|-3\right|+|y|-3\right|=1$$



Метод областей при розв'язуванні рівнянь з параметрами

Параметр – додаткова змінна, що може набувати різних значень, відведемо для нього координатну вісь, тобто задачу з параметром будемо розглядати як функцію $f(x;a)$.

Схема розв'язування рівнянь з параметрами

1. Будуємо графічний образ

2. Перетинаємо отриманий графік прямими перпендикулярними вісі параметру

3. «Зчитуємо» потрібну інформацію

Знайти всі значення параметра *а*, при яких рівняння

$$(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$$

має три корені?

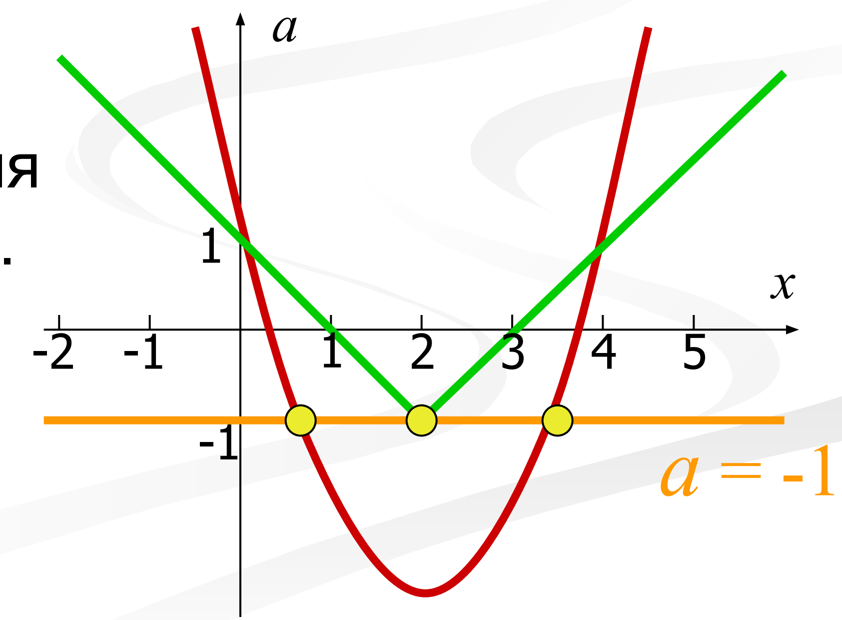
Дане рівняння рівносильне сукупності: $\left[\begin{array}{l} a-x^2+4x-1=0 \\ a-|x-2|+1=0 \end{array}\right.$

Виразивши параметр а, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} a=x^2-4x+1 \\ a=|x-2|-1 \end{array}\right.$$

Графік сукупності – об'єднання графіків параболи та ламаної.

Пряма а = -1 перетинає отримане об'єднання у трьох точках.



Відповідь: $a=-1$

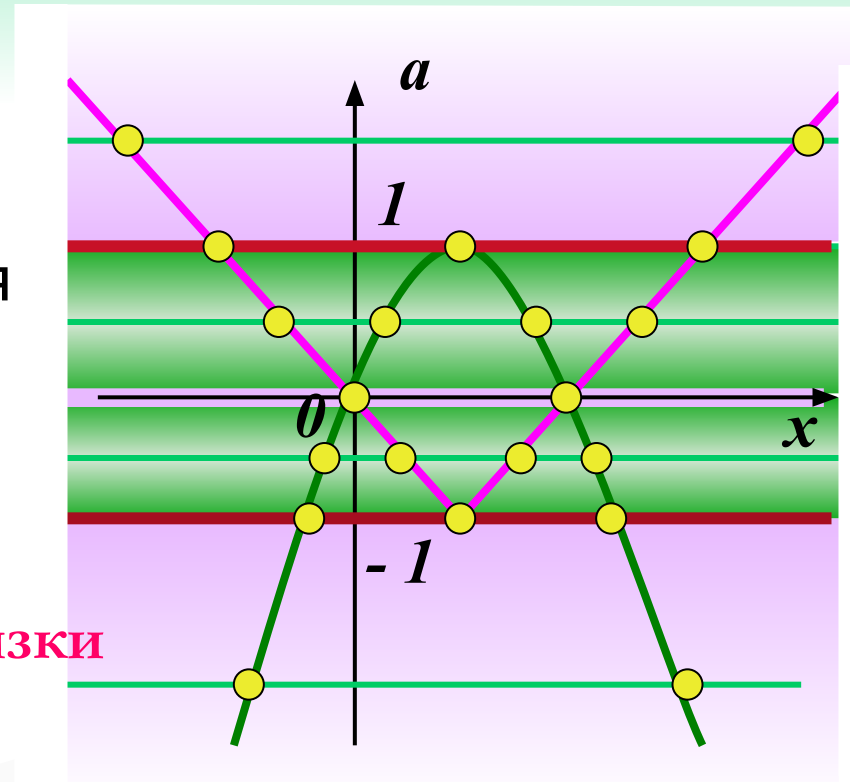
Скільки розв’язків має рівняння

(a-2x+x)(a+1-|x-1|)=0

в залежності від значень параметра *а*?

Дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} a = 2x - x^2 \\ a = |x-1| - 1 \end{array}\right.$$



Графік сукупності – об’єднання графіків параболи та ламаної.

Використовуючи, рисунок визначаємо відповідь:

Якщо а<-1, а=0 і а>1, то 2 розв’язки

Якщо а=±1, то 3 розв’язки

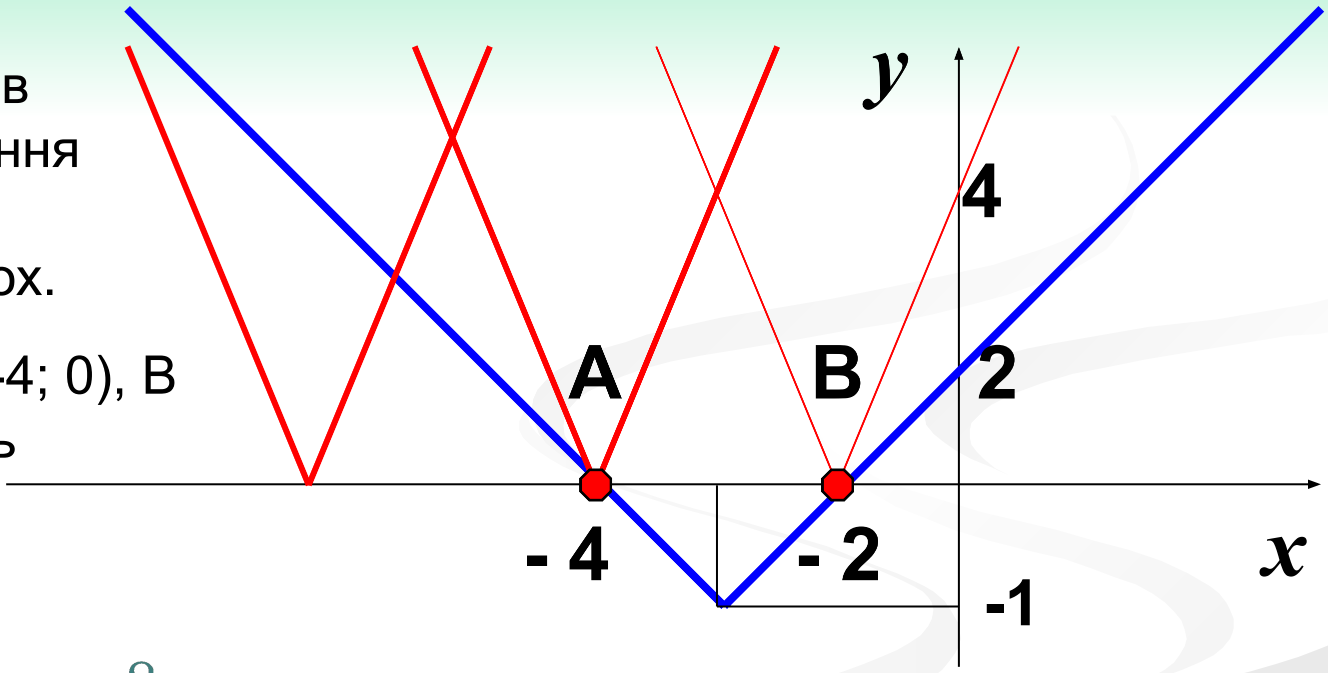
Якщо -1<а<0 і 0<а<1, то 4 розв’язки

Знайдіть всі значення параметра *a*, при яких рівняння |2x - a| + 1 = |x + 3| має єдиний розв'язок.

$$|2x-a|=|x+3|-1$$

Побудуємо графік правої частини рівняння.

Графік лівої частини в залежності від значення параметра буде рухатись вздовж осі ox.



Координати точок A(-4; 0), B (-2; 0) задовольняють рівняння

$$y=|2x-a|.$$

$$\left[\begin{array}{l} |-8-a|=0 \\ |-4-a|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-8 \\ a=-4 \end{array}\right..$$

Відповідь: $a=-8,\ a=-4$

Метод областей

(«перехід» методу інтервалів з прямої на площину)

Нерівності з однією змінною

Нерівності з двома змінними

Метод інтервалів:

1. ОДЗ
2. Корені
3. Вісь
4. Знаки на інтервалах
5. Відповідь

Метод областей:

1. ОДЗ
2. Граничні лінії
3. Координатна площина
4. Знаки в областях
5. Відповідь

На координатній площині зобразіть множину точок, що задовольняють нерівність

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \le 0$$

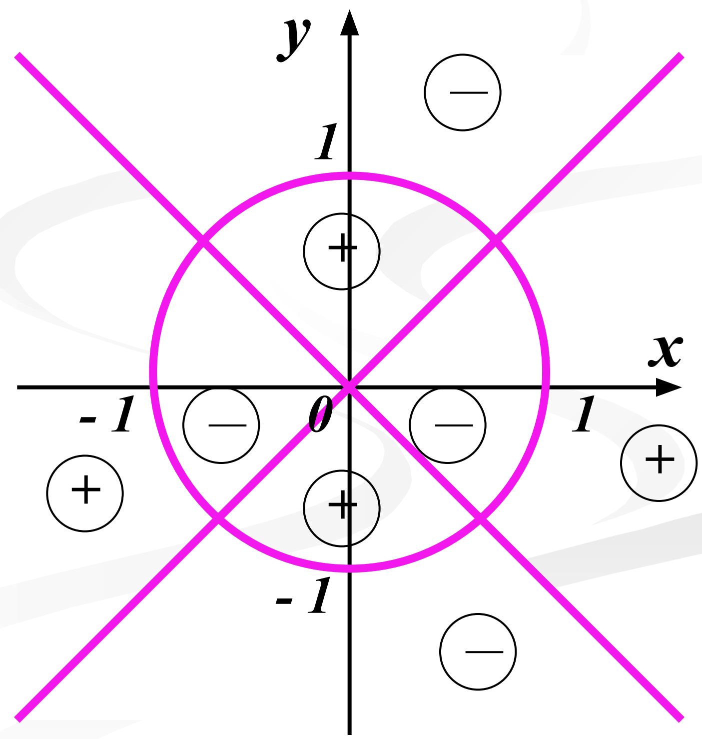
Визначимо ОДЗ: $x^2 + y^2 \neq 1$

Граничні лінії:

$x^2 - y^2 = 0 \iff |y| = |x|$

$x^2 + y^2 = 1$

Будуємо граничні лінії. Вони розбивають площину на вісім областей, визначаючи знаки підстановкою в окремих точках, отримаємо розв'язок.



Скільки розв’язків має система залежно від значення параметра *a*?

$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

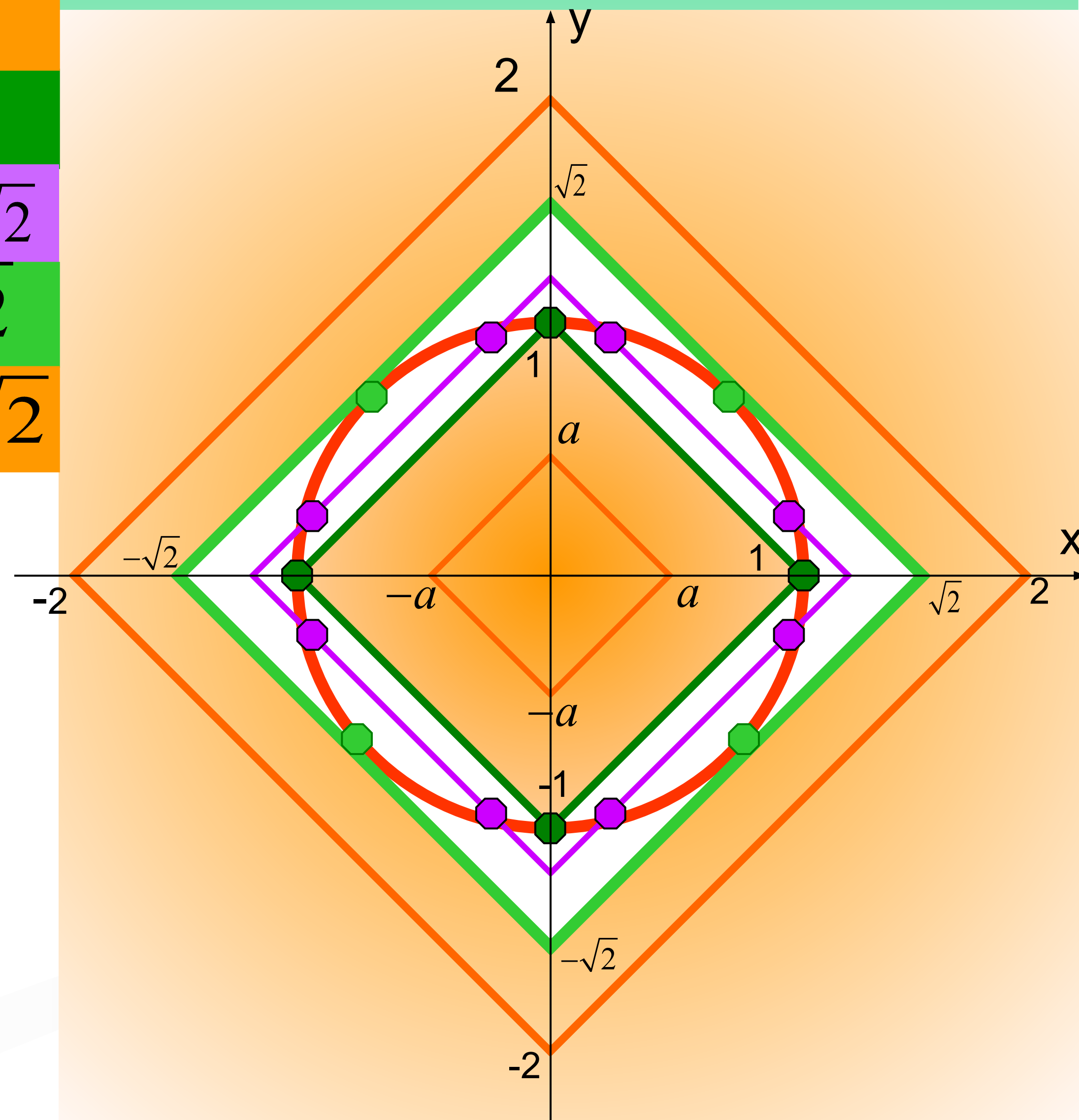
Розв’язків немає, якщо $a < 1$

4 розв’язки, якщо $a = 1$

8 розв’язків, якщо $1 < a < \sqrt{2}$

4 розв’язки, якщо $a = \sqrt{2}$

Розв’язків немає, якщо $a > \sqrt{2}$



Відповідь:

Графіком другого

Розв’язків немає, якщо $a < 1$ або $a > \sqrt{2}$

4 розв’язки, якщо $a = 1$ або $a = \sqrt{2}$

8 розв’язків, якщо $1 < a < \sqrt{2}$

Знайти всі значення параметра p, при яких множина розв'язків нерівності $(p-x^2)(p+x-2)<0$ не містить жодного розв'язку нерівності $|x|<1$

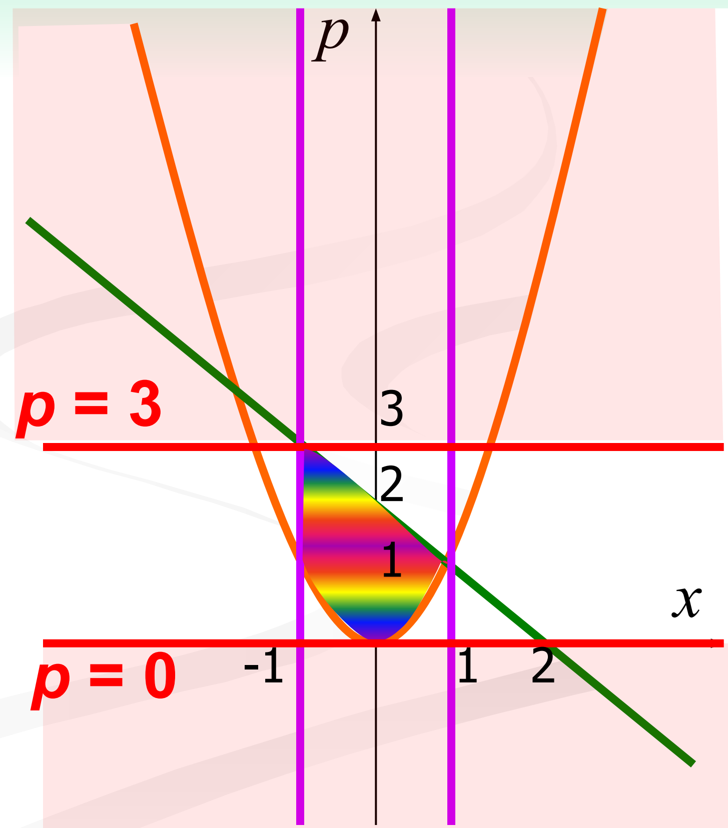
Побудуємо граничні лінії

$p = x^2$ і $p = 2 - x$

Визначимо знаки в отриманих областях і отримаєм розв'язок даної нерівності.

З отриманої множини виключаєм розв'язки нерівності $|x| < 1$

По рисунку легко визначаємо відповідь $p \le 0,\ p \ge 3$



Відповідь: $p \le 0,\ p \ge 3$

При яких додатніх значеннях параметра *а*, система рівнянь має чотири розв'язки?

$$\begin{cases} \big|4-|x-2|\big|-|y|=0 \\ x^2+y^2=a^2+4(x-1) \end{cases}$$

Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} \big|4-|x-2|\big|=|y| \\ (x-2)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

Розв'язків немає, якщо $a<2\sqrt{2}$

Побудова першого рівняння:

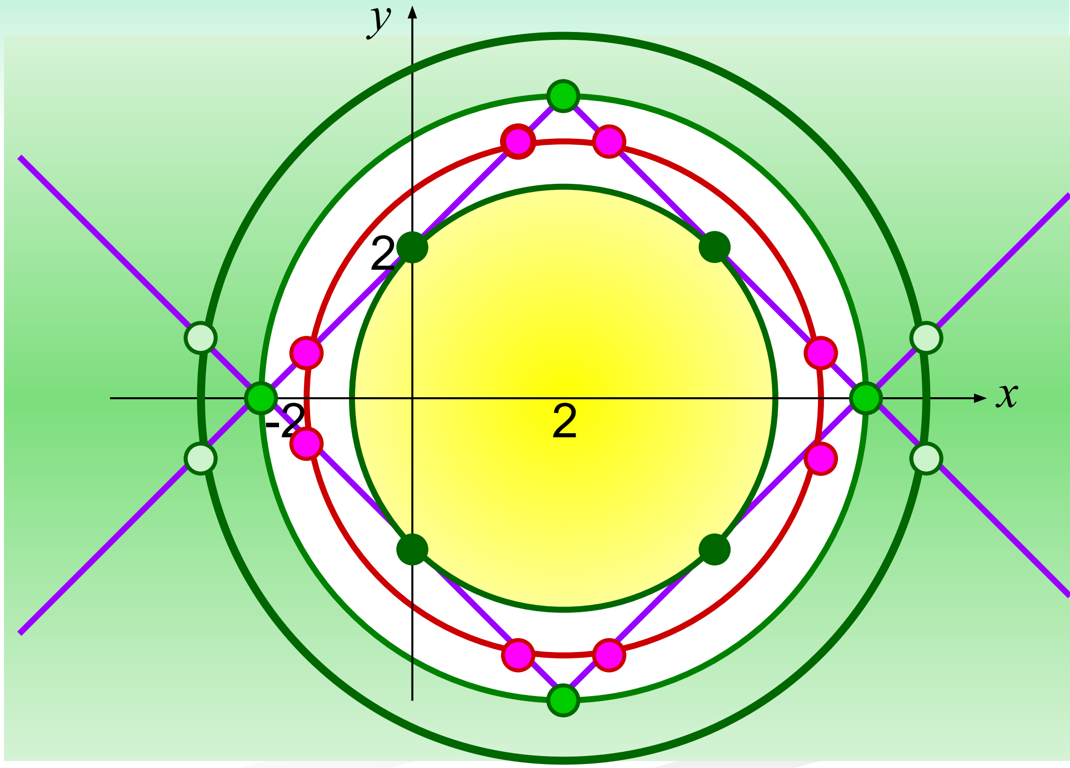
4 розв'язки, якщо $a=2\sqrt{2}$

$y=\big|4-|x-2|\big|$ і симетрично

8 розв'язків, якщо $2\sqrt{2}<a<4.$

Друге рівняння задає сімейство кіл з

4 розв'язки, якщо $a\geq 4$



Відповідь: $a=2\sqrt{2}$ і $a\geq 4$

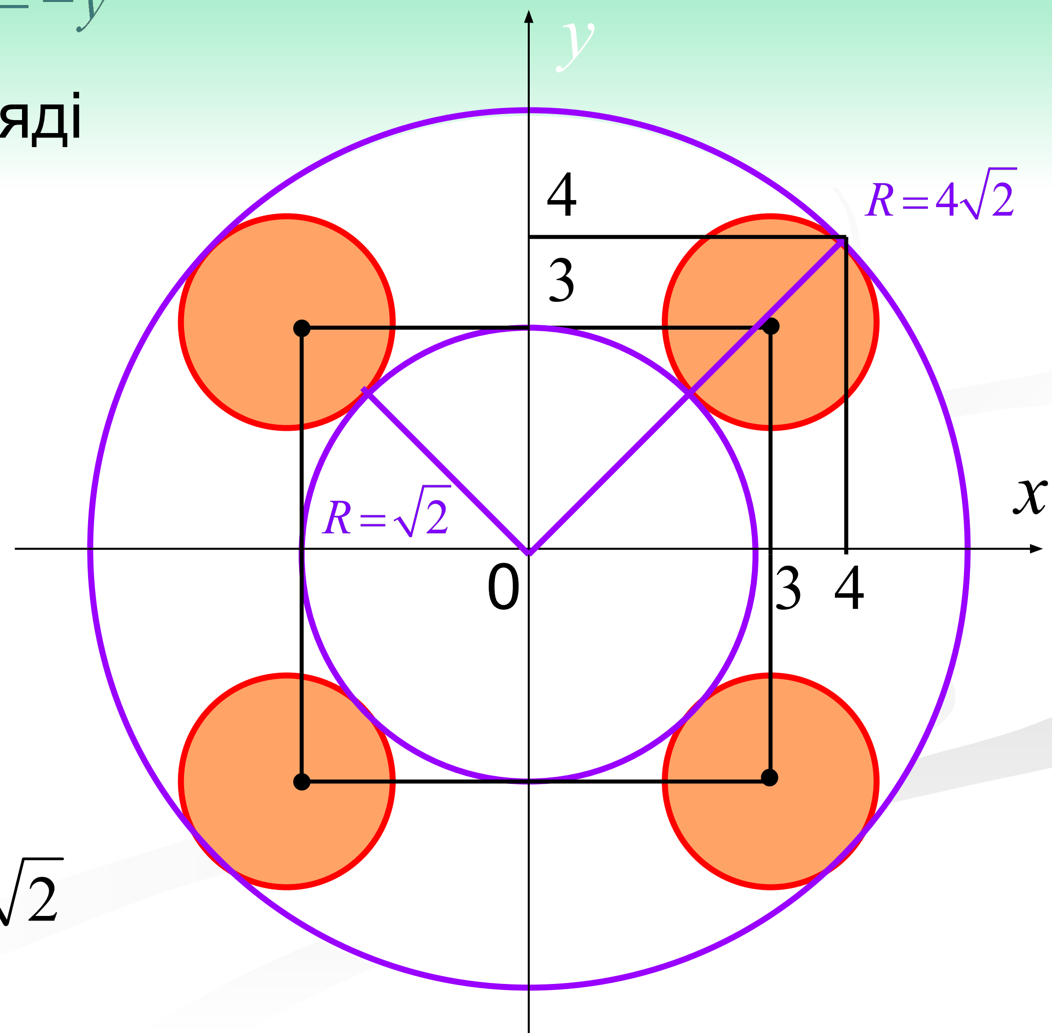
Знайти всі значення параметра a при кожному з яких система має хоча б один розв’язок

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \le 0 \\ x^2 - a^2 = -y^2 \end{cases}$$

Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \le 1 \\ x^2 + a^2 = \quad {}^2 \end{cases}$$

Побудуємо графіки нерівності та рівняння, що входять у систему.



Очевидно, що умова задачі виконується, якщо

$-4\sqrt{2} \le a \le -\sqrt{2}$ $\sqrt{2} \le a \le 4\sqrt{2}$

Знайти суму цілих значень параметра а при яких рівняння має три корені $\left(a+2x-x^2+19\right)\left(a-3-|x-4|\right)=0$

Дане рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} a-x^2+2x+19=0 \\ a-3-|x-4|=0 \end{array}\right.$

Виразивши параметр *а*, отримаємо: $\left[\begin{array}{l} a=x^2-2x-19 \\ a=|x-4|+3 \end{array}\right.$

Із рисунка видно, що рівняння має три корені у випадках:

1) Якщо $a = 3$;

2) Якщо $x < 4$, $x^2-2x-19=-(\quad -4)+3$

$x^2-x-26=0,\ x_{1,2}\notin Z \Rightarrow \varnothing$

3) Якщо $x > 4$, $x^2-2x-19=x-4+3,$

$x^2-3x-18=0,\ x_1=-3(\varnothing),\ x_2=6$

Тоді $a = 6 - 4+3 = 5$.

Відповідь: 8.