

Презентація на тему:



Трапеція. Центральні вписані кути. Вписані й описані кути.

Сьогодні в програмі:

1.Правила

2.Приклади

3.Кросворд

4.Ребуси

5.Гра «Змійка»

6.Про автора





ПРИКЛАД
И

Ребус
И

Правил
а

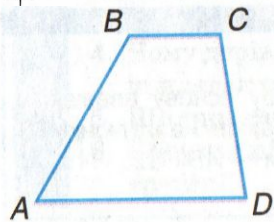
КРОСВО
РД

ПРО
автора



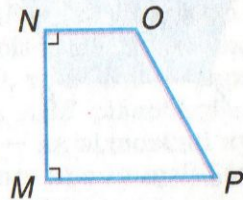
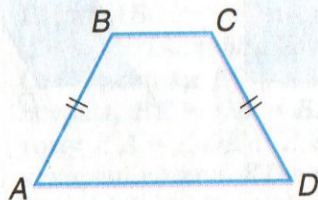


Трапеція



■ Мал. 50

Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, називають *трапецією* (мал. 50). Паралельні сторони трапеції — її *основи*, дві інші — *бічні сторони*. Трапецію з рівними бічними сторонами називають *рівнобічною* або *рівнобедреною*. Якщо трапеція має прямий кут, її називають *прямокутною*. На малюнку 51 трапеція $ABCD$ — рівнобічна, а трапеція $MNOP$ — прямокутна.

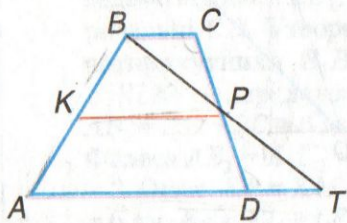


■ Мал. 51

У кожній трапеції сума двох кутів, що прилягають до бічної сторони, дорівнює 180° . Чому?

Середньою лінією трапеції називається відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

ТЕОРЕМА 9 Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.



■ Мал. 52

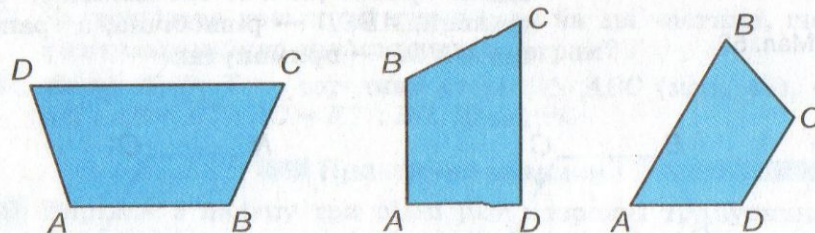
■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай KP — середня лінія трапеції $ABCD$ (мал. 52), а прямі BP і AD перетинаються в точці T . Трикутники BSP і TDP рівні, бо $SP = PD$, $\angle BPS = \angle TPD$, $\angle BPS = \angle TPD$. Отже, $BS = DT$ і $BP = PT$. Середня лінія KP трапеції $ABCD$ є

також середньою лінією трикутника ABT . Тому $KP \parallel AT$ і $KP = \frac{1}{2} AT$. Отже, $KP \parallel AD$ і $KP = \frac{1}{2} (AD + BC)$. \square

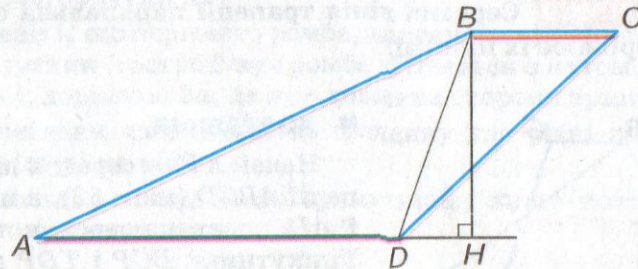
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Креслячи трапецію, найчастіше її більшу основу вважають нижньою основою. Це не обов'язково. Зображені на малюнку 53 чотирикутники — також трапеції. Їхні основи — AB і CD .



■ Мал. 53

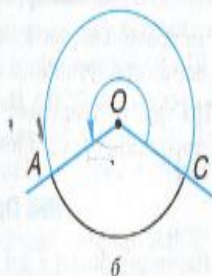
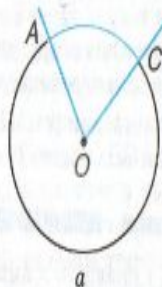
Чи одне й те саме означають терміни *відстань між основами трапеції* і *відстань між прямими, на яких лежать основи трапеції*? Не завжди. Наприклад, на малюнку 54 зображено трапецію, відстань між основами якої дорівнює довжині діагоналі BD (відстані між найближчими точками відрізків AD і BC). А відстанню між прямими AD і BC є висота BH трапеції $ABCD$ і $BH < BD$.



■ Мал. 54

Далі розглядатимемо властивості чотирикутників, вписаних в коло і описаних навколо кола. Для цього введемо поняття центрального кута і вписаного кута.

Кут, вершина якого збігається з центром кола, називається **центральною кутом**. Сторони центрального кута ділять коло на дві дуги. Одна з них лежить у внутрішній області центрального кута. Говорять, що вона *відповідає* даному куту. Наприклад, виділена на малюнку 57, а дуга AC відповідає центральному куту AOC , і навпаки: центральний кут AOC відповідає дузі AC . Центральний кут може бути і більшим від розгорнутого (мал. 57, б).



■ Мал. 57

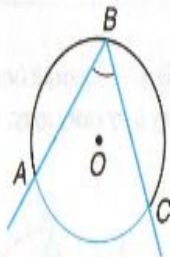
Кожна дуга кола має певну *кутову міру* — міру відповідного їй центрального кута. Кажуть також, що **центральному куту вимірюється дугою, яка йому відповідає**. Наприклад, якщо $\angle AOC = 60^\circ$, то і кутова міра дуги AC дорівнює 60° . Пишуть: $\overset{\frown}{AC} = 60^\circ$. Кутова міра всього кола дорівнює 360° .

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називається **вписаним кутом**. Якщо дуга AC лежить у внутрішній області вписаного кута ABC , то говорять, що даний вписаний кут *спирається на дугу* AC (мал. 58).

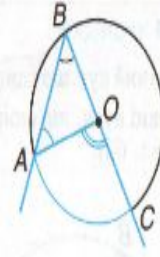
ТЕОРЕМА 10 Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

ДОВЕДЕННЯ.

Розглянемо спочатку випадок, коли одна сторона вписаного кута ABC , наприклад BC , проходить через центр кола O

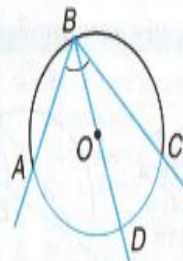


■ Мал. 58

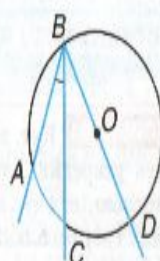


■ Мал. 59

(мал. 59). Сполучивши точки A і O відрізком, одержимо трикутник AOB , в якому $OA = OB$, отже, $\angle A = \angle B$. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle AOC = \angle A + \angle B = 2\angle B$, звідки $\angle B = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC}$.



■ Мал. 60



■ Мал. 61

Якщо жодна із сторін вписаного кута ABC не проходить через центр кола (мал. 60, 61), то, провівши діаметр BD , матимемо:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AD} \text{ і } \angle DBC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{DC}.$$

Якщо центр кола лежить у внутрішній області $\angle ABC$ (див. мал. 60), то

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC}.$$

Якщо центр кола лежить поза кутом ABC (див. мал. 61), то

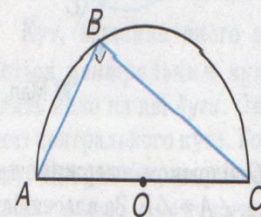
$$\angle ABC = \angle ABD - \angle DBC = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC}.$$

Розглянуто всі можливі випадки.

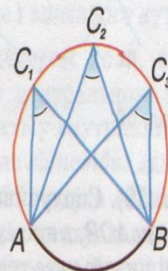
Отже, кожний вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається. \square

НАСЛІДКИ

1. Вписаний кут, що спирається на діаметр, — прямий (мал. 62).
2. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, — рівні (мал. 63).



■ Мал. 62



■ Мал. 63

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

ТЕОРЕМА 11 Кут, вершина якого лежить усередині кола, вимірюється півсумою двох дуг, на які спираються даний і вертикальний до нього кути.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі AE і CD перетинаються в точці B , що міститься всередині кола (мал. 64). Доведемо, що кут ABC вимірюється півсумою дуг AC і DE .

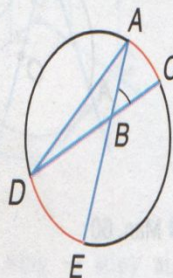
Проведемо відрізок AD . $\angle ABC = \angle A + \angle D$ як зовнішній кут $\triangle ABD$. Кути A і D вписані, тому

$$\angle ABC = \angle A + \angle D = \frac{1}{2} \overset{\frown}{DE} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{AC}). \square$$

ТЕОРЕМА 12 Кут, сторони якого перетинають коло, а вершина лежить поза колом, вимірюється піврізницею дуг цього кола, що лежать усередині кута.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай сторони довільного кута A перетинають коло в точках, позначених на малюнку 65. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle A = \angle CBP - \angle P$.



■ Мал. 64

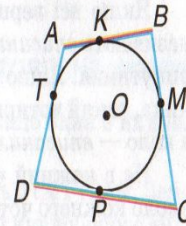
півсумою цих дуг, тобто півколом. Півколу відповідає 180° . Отже, $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

Аналогічно можна показати, що $\angle B + \angle D = 180^\circ$. \square

ТЕОРЕМА 14 Якщо чотирикутник описаний навколо кола, то сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола. Доведемо, що $AB + CD = BC + AD$ (мал. 76). Позначимо точки дотику сторін чотирикутника до вписаного кола буквами K, M, P, T . Оскільки відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні, то $AK = AT, BK = BM, CP = CM, DP = DT$. Додавши почленно всі ці рівності, дістаємо $AK + BK + CP + DP = BM + CM + DT + AT$, або $AB + CD = BC + AD$. \square



Мал. 76

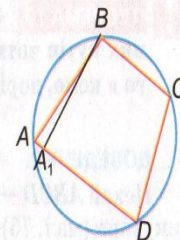
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Для сформульованих двох останніх теорем правильні також обернені теореми.

ТЕОРЕМА 15 Якщо сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180° , то цей чотирикутник можна вписати в коло.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A + \angle C = 180^\circ$ (мал. 77). Покажемо, що навколо нього можна описати коло. Через точки B, C і D можна описати єдине коло. Воно обов'язково пройде і через точку A . Бо коли б це коло перетинало пряму AD не в точці A , а в іншій точці A_1 , то був би вписаний чотирикутник A_1BCD і ми б мали $\angle BA_1D + \angle C = 180^\circ$. За умовою $\angle BAD + \angle C = 180^\circ$. З цих

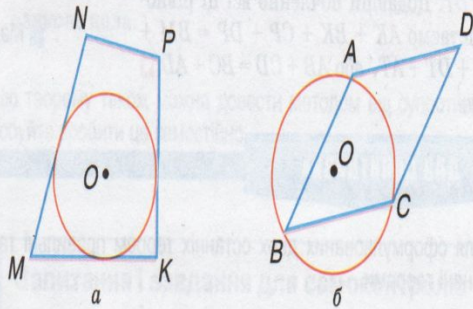


Мал. 77

Ви вже знаєте, які трикутники називаються вписаними в коло і які — описаними навколо нього (пригадайте!). Подібно визначаються вписані й описані чотирикутники.

Якщо всі вершини чотирикутника лежать на колі, його називають *вписаним* у коло, а коло — *описаним* навколо чотирикутника. Якщо коло дотикається до всіх сторін чотирикутника, такий чотирикутник називають *описаним* навколо кола, а коло — *вписаним* у чотирикутник.

Не в кожному чотирикутнику можна вписати коло і не навколо кожного чотирикутника — описати коло (мал. 74).



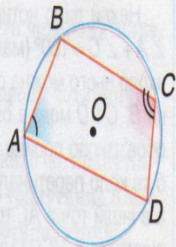
Мал. 74

Розглянемо найважливіші властивості чотирикутників, описаних навколо кола і вписаних у коло.

ТЕОРЕМА 13 Сума двох протилежних кутів чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює 180° .

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — вписаний у коло чотирикутник (мал. 75). Його протилежні кути A і C вписані; перший вимірюється половиною дуги BCD , другий — половиною дуги BAD . Сума кутів A і C вимірюється



Мал. 75

двох рівностей виходить, що $\angle BAD = \angle BA_1D$, тобто зовнішній кут трикутника $\triangle AA_1B$ дорівнює його внутрішньому куту. Цього не може бути. Отже, зроблене припущення неправильне. За умови $\angle A + \angle C = 180^\circ$ коло, яке проходить через точки B, C, D , обов'язково проходить і через точку A . \square

НАСЛІДКИ

1. Навколо кожного прямокутника можна описати коло.
2. Навколо кожної рівнобічної трапеції можна описати коло.

ТЕОРЕМА 16 Якщо сума двох протилежних сторін опуклого чотирикутника дорівнює сумі двох інших його сторін, то такий чотирикутник можна описати навколо кола.

Цю теорему також можна довести методом від супротивного. Спробуйте зробити це самостійно.



ПРИКЛАД

ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ.

ТЕОРЕМА ГАЛЕСА. СЕРЕДНІ ЛІНІЇ ТРИКУТНИКА І ТРАПЕЦІЇ

1. Знайдіть центральний кут, що спирається на дугу, яка становить:

Варіант 1

$\frac{5}{24}$ кола

$\frac{7}{24}$ кола

Варіант 2

А $37^\circ 30'$ Б $52^\circ 30'$ В 75° Г 105°

2. Знайдіть вписаний кут, що спирається на дугу, яка становить:

$\frac{7}{9}$ кола

$\frac{5}{9}$ кола

А 50° Б 70° В 100° Г 140°

3. Точки M, N, P — середини сторін рівностороннього трикутника ABC . Знайдіть:
сторону AB , якщо периметр трикутника MNP дорівнює 12 см сторону MN , якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см

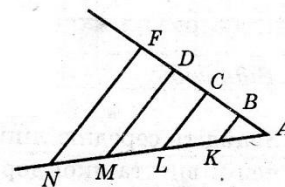
А 12 см Б 14 см В 6 см Г 8 см

4. На рисунку $BK \parallel CL \parallel DM \parallel FN$, $AB = BC = CD = DF = 3$ см. Знайдіть MK , якщо:

$NK = 6$ см

$MA = 9$ см

А 4 см Б 6 см В 9 см Г 12 см



5. Знайдіть основи трапеції, діагональ якої ділить середню лінію на відрізки задовжки:

4 см і 8 см

6 см і 8 см

А 8 см і 12 см Б 8 см і 16 см В 12 см і 16 см Г 16 см і 20 см

6. Середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює 5 см. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо її периметр дорівнює:

24 см

26 см

А 16 см Б 14 см В 8 см Г 7 см

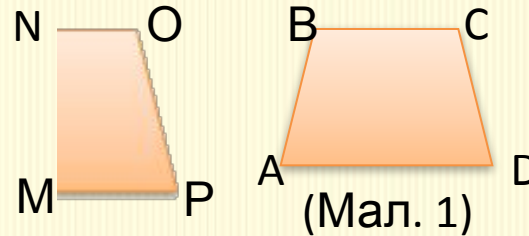
Питання до кросворду



1. Якщо трапеція має прямий кут, її називають

2. Середньою лінією трапеції називається

3. На малюнку 1 трапеція $ABCD$ - ..., а трапеція $MNOP$ – прямокутна.



4. Середня лінія трапеції основам і дорівнює їх півсумі.

5. Трапецію з рівними бічними сторонами називають

6. Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, називають

7. Паралельні сторони трапеції – її основи, дві інші -

8. У кожній трапеції сума двох кутів, що ... до бічної сторони, дорівнює 180° *



Кросвор



П Р Я М О К У Г Л О Ю

В І Д Р І З О

Р І В Н О Б І Ч А

П А Р А Л Е Л Ь Н

Р І В Н О В Д Р І А Н Н О

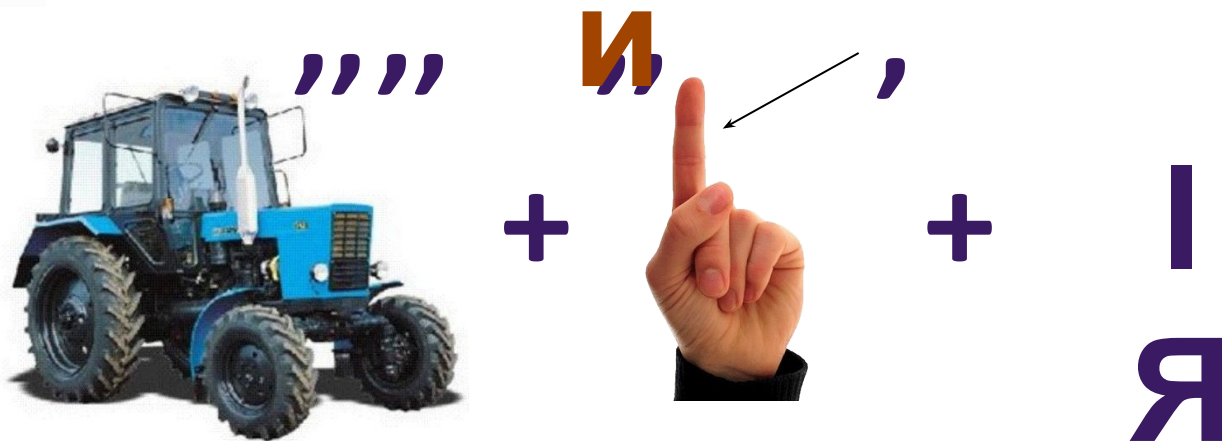
Т Р А П Е Ц І О

В І Ч Н



П Р И Л І Г А Ю Т




Ребус

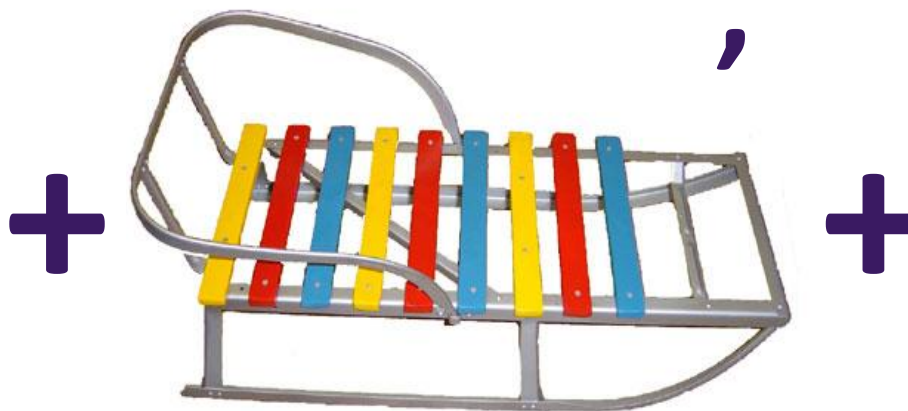




B +  +  + I

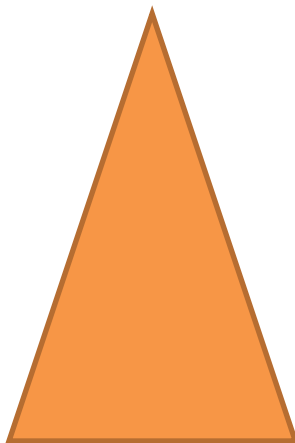
 +





4

+



+

И





Гра „ Змійка”



(Трапеція)





Над презентаією
працював
Учень 8-А класу
Мар'їнської ЗОШ І-ІІІ ст.
№2
Осолодзько Олег