

*Не лякайтесь слова "аркус"
Адже "аркус" – це кут*

Боярська ЗОШ I-III ступенів №1
Києво-Святошинського р-ну
Київської обл.
Вч. Овчинникова (Яськова) О.Й.
м.Боярка

Арксинус і його властивості.

Мета: Усвідомлення поняття арксинуса та його властивостей.

Знати: означення арксинуса a , які значення мають a і b у виразі
 $\arcsin a = b$

Вміти: застосовувати вивчені поняття арксинуса в простих вправах.

I. Актуалізація опорних знань.

Фронтальне опитування.

1. Дати означення зростаючої й спадної функції на проміжку. Як довести, зростає чи спадає дана функція?
2. Як знайти нулі функції?
(Нулі функції знаходимо з умови $f(x) = 0$).
3. Як знайти проміжки знакосталості функції?
 - а) Проміжки, де функція набуває додатних значень, дістаємо з умови $f(x) > 0$.
 - б) Проміжки, де функція $y = f(x)$ набуває від'ємних значень, дістаємо з умови $f(x) < 0$.
4. Дати означення парної і непарної функції. Як розміщені їх графіки?
5. Дати означення періодичної функції з періодом $T \neq 0$. Який найменший додатній період функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса?
Чи може періодична функція зростати на всій числовій прямій? Які функції є періодичними?
6. Дати означення оберненої функції і її властивості.
 - а) Яка необхідна і достатня умова існування оберненої функції?

Необхідна умова існування оборотної функції така: вона має набувати кожного свого значення лише для одного значення аргументу.

Достатня умова існування оберненої функції для даної функції є її монотонність, тобто зростання або спадання на всій області визначення.

б) Алгоритм знаходження формули для оберненої функції.

в) Цікаво, чи має функція $y = x^2$ обернену функцію на R ? Яка умова повинна виконуватись? (Щоб була однозначна).

7. Сформулювати теорему про корінь рівняння, функція якого зростає чи спадає на проміжку I .

Відповідь: Теорема про корінь рівняння, функція якого зростає або спадає на проміжку I формулюється так:

Якщо функція $f(x)$ зростає (або спадає) на проміжку I , а число a – будь-яке із значень, яких набуває функція $f(x)$ на цьому проміжку, тоді рівняння $f(x) = a$ має єдиний корінь на проміжку I .

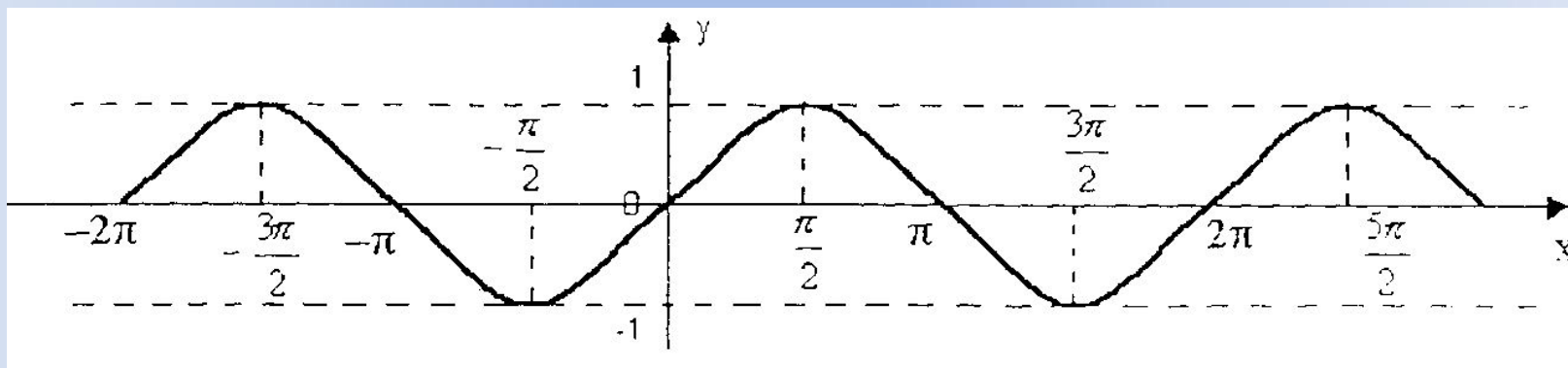
Ми знаємо, що кожне рівняння є окремим випадком відповідної функції.

Наприклад, розв'яжемо рівняння:

$$x^3 + x = 2.$$

Ліва частина рівняння функція $f(x) = x^3 + x$, причому зростаюча на \mathbb{R} , бо є сумою двох зростаючих функцій. Тому рівняння $x^3 + x = 2$ має єдиний корінь. Легко бачити, що це $x = 1$.

Графік і властивості функції $y = \sin x$.

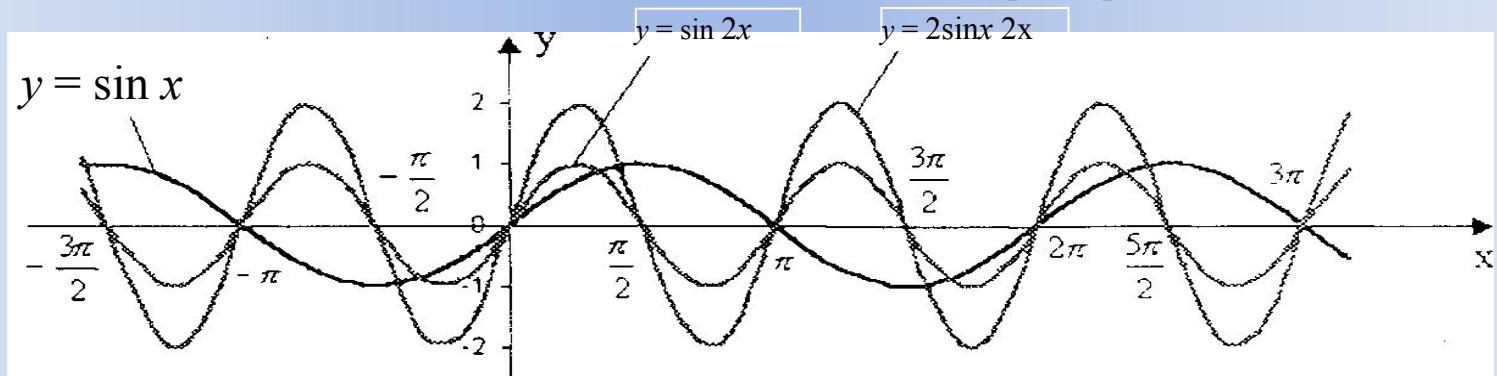


1. $D(f) = R;$
 2. $E(f) = [-1;1];$
 3. $\sin (-x) = -\sin x;$
 4. $\sin (x + 2\pi n) = \sin x;$
 5. $\sin x = 0$ при $x = \pi n, n \in z$
 6. Зростає на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in z$
 7. Спадає на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in z$
 8. $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in z$
 9. $\sin x < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n, 2\pi n), n \in z$
 10. $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z$
- $\sin x = -1$ при $x = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in z$

Опитування по картках.

1. Властивості і графік функції $y = \sin x$.
2. Схематично побудувати графік функції $y = 2\sin 2x$.
3. Знайти область визначення і область значень функції .

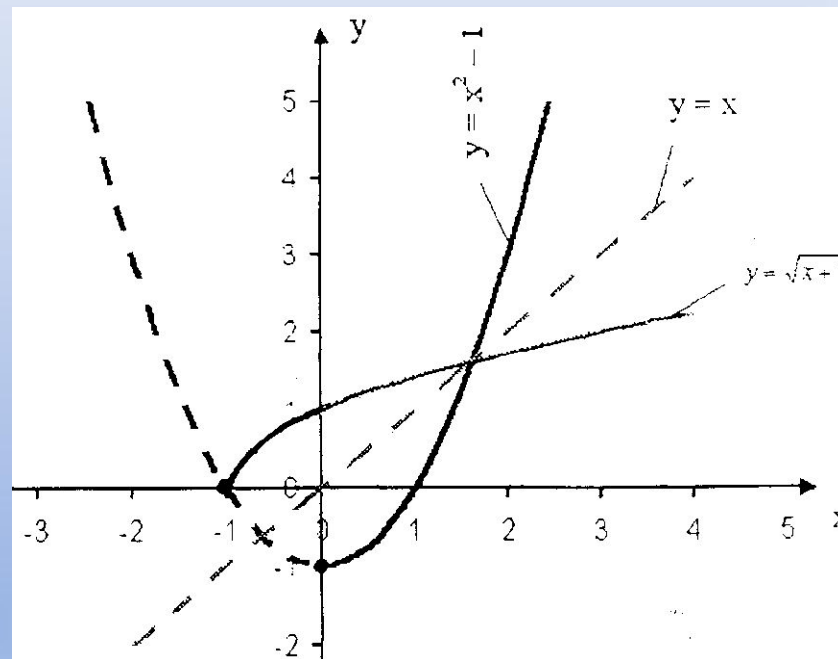
$$y = 2\sin 2x, T = \pi.$$
$$y = \sqrt{2} \sin 2x$$
$$D(y) = \left[\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}$$
$$E(y) = [0; \sqrt{2}]$$



П уч. 1. Знайти функцію, обернену до даної $y = x^2 - 1$ на проміжку $x \in [0; +\infty)$ і побудувати її графік. Обернена функція .

- а) Як розміщені графіки?
- б) Як змінюються області визначення і значень?

Дана функція $f(x) = x^2 - 1$, обернена .



$$D(f) = [0; +\infty); D(g) = [-1; +\infty); \quad D(f) = E(g), D(g) = E(f).$$

$$E(f) = [-1; +\infty); E(g) = [0; +\infty).$$

2. Яка необхідна і достатня умова існування оберненої функції?
3. Знайти область визначення і область значень функції $y = \sqrt{3} \cos 2x$

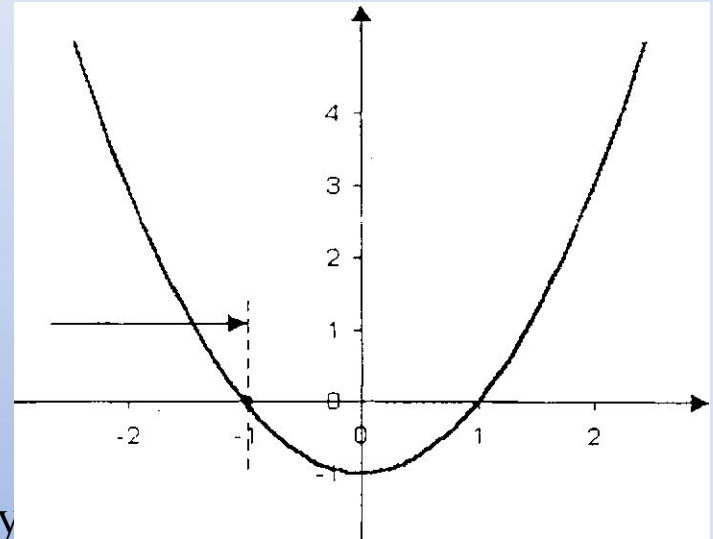
Відп. $D(y) = \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}$

$$E(y) = [0; \sqrt{3})$$

III уч. 1. Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{якщо } x \geq -1 \\ 1, & \text{якщо } x < -1 \end{cases}$$

- а) Зобразити схематично її графік.
 - б) Обчислити $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$.
 - в) Вказати проміжки зростання і спадання.
 - г) На яких проміжках вона має обернену і чому?
2. Які з функцій $y = x^2$, $y = x^3$ оборотні? Чому?



3. Яка функція називається періодичною?

IV уч. 1. Сформулювати теорему про корінь рівняння, функція якого зростає або спадає на проміжку I . Навести приклад. (Див. вище!).

2. Яка функція називається зростаючою? Спадною?

3. Знайти найменший додатний період функції:

$$f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2$$

$$\text{Відп.} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 = 1 + \sin x = 2\pi.$$

II. Мотивація навчання.

Ми з вами навчилися розв'язувати лінійні рівняння, квадратні рівняння, біквадратні рівняння. Щоб розв'язати, наприклад, квадратне рівняння, треба знати формулу його коренів.

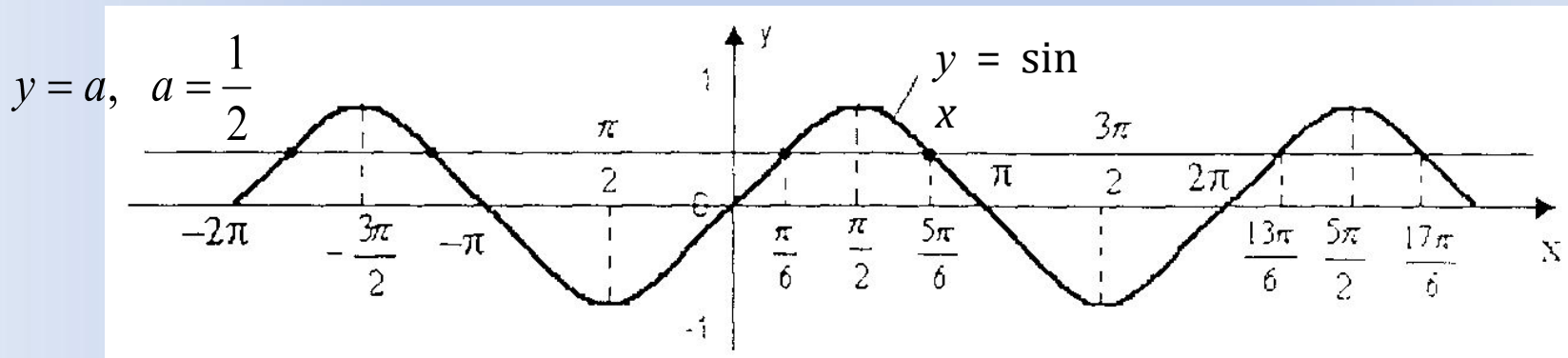
Ми знаємо, що кожне рівняння є окремим випадком відповідної функції. Наприклад, $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$ – загальний вид квадратного рівняння, а $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$ – квадратична функція.

Ми з вами познайомилися з тригонометричними функціями: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, а отже повинні навчитися розв'язувати прості тригонометричні рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Нехай дано рівняння $\sin x = a$, де $|a| \leq 1$

Візьмемо $a = \frac{1}{2}$, тобто рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ (див. малюнок нижче). По графіку ми бачимо, що існує безліч значень x , які відрізняються на число 2π і задовольняють рівняння. Це числа

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \dots$$



Як же записати формулу коренів цього рівняння?

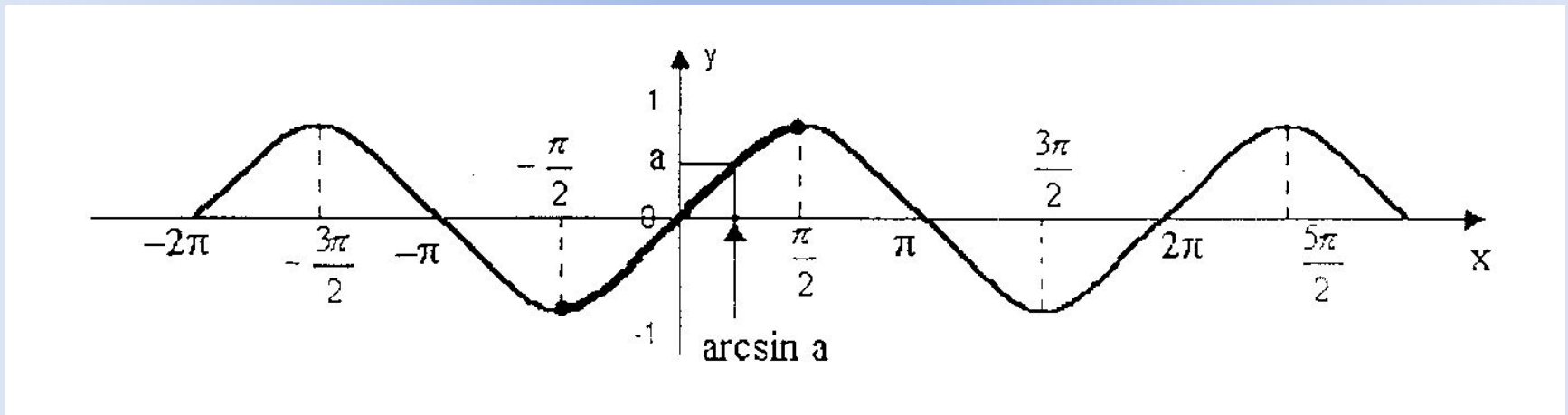
Щоб дати відповідь на такі запитання, треба засвоїти нові поняття, яким і присвячується цей і наступний уроки.

III. Сприймання й усвідомлення поняття арксинуса.

І так, тема сьогоднішнього уроку:

Арксинус і його властивості.

Застосуємо раніше вивчену теорему про єдиність кореня рівняння $f(x) = a$,
функція якого зростає (або спадає) на проміжку I , до рівняння $\sin x = a$.



Бачимо з графіка, що функція $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ монотонно зростає і набуває на ньому всіх своїх значень від -1 до 1 . А тому згідно з теоремою про корінь рівняння для будь-якого числа a , такого що $-1 \leq a \leq 1$ в проміжку існує єдиний корінь b рівняння $\sin x = a$. Цей корінь – число b (кут або дуга) і назвали арксинусом числа a і позначили $\arcsin a$. Отже, $\arcsin a = b$, де

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq a \leq 1 - \text{число} \\ -\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2} - \text{це головний кут} \end{array} \right. \quad \text{або} \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq a \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Отже, $(\arcsin a)$ арксинусом числа a називається кут (число), заключений у проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ синус якого дорівнює a . $\sin(\arcsin a) = a$

$$\text{Тобто } \sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \text{ бо } \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Отже, ще раз підкреслимо: з означення арксинуса випливає, що $-1 \leq a \leq 1$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$$

IV. Розв'язування вправ на закріплення.

1. Розглянемо $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ – це такий кут з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

що його синус дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Відомо, що це $\frac{\pi}{3}$ звідси $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ бо $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2.

Обчислити:

а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, бо $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

б) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, бо $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

в) $\arcsin \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, бо $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

г) $\arcsin 1,5$ – не має змісту, бо $1,5 \notin [-1; 1]$

д) $\cos \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ е) $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ є) $\cos(\arcsin 1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

ж) $\arcsin \frac{5}{3}$ – не має змісту, бо $\frac{5}{3} \notin [-1; 1]$

Запам'ятати:

$$1) \arcsin 0 = 0; \quad 2) \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$
$$5) \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Властивості арксинуса a :

$$1) \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad 3) \arcsin(-a) = -\arcsin a,$$

$$2) \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ значення } a \text{ з } \arcsin \uparrow \text{ з } \uparrow a$$

З графіка видно, що функція $y = \sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ монотонно зростає від -1 до 1 і приймає всі значення, що належать цьому проміжку, причому кожне із значень по одному разу, тобто множина значень і взаємно однозначно відображаються одна на одну.

А якщо функція $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ зростає і неперервна, то вона має обернену функцію, зростаючу і неперервну. Цю функцію назвали арксинусом і позначили $y = \arcsin x$.

Згідно означення оберненої функції, її область визначення є відрізок $[-1; 1]$, а множиною значень відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$D(\arcsin) = [-1; 1] \quad E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Графік функції $y = \arcsin x$, де $x \in [-1; 1]$ симетричний графіку $y = \sin x$, де $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ відносно бісектриси $y = x$.

Властивості функцій:

$$y = \arcsin x \quad y = \sin x$$

$$1) D(y) = [-1;1];$$

$$1) \quad ;$$

$$D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$2) E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] ;$$

$$2) E(y) = [-1;1];$$

$$3) \text{ Непарна, бо } \arcsin(-a) = -\arcsin a; \quad 3) \text{ Непарна: } \sin(-x) = -\sin x;$$

$$4) \text{ Зростає від } -\frac{\pi}{2} \text{ до } \frac{\pi}{2} \quad 4) \text{ Зростає від } -1 \text{ до } 1;$$

$$5) \arcsin 0 = 0; \quad 5) \sin 0 = 0.$$

Д/з: §3(п.1,2), №№ 121", 124°, 134(а, б), 113(а, б).

Для сильніших: побудувати графік оберненої функції $y = \arcsin x$, і описати її властивості.