Формулы Тейлора и Маклорена и их использование для представления и приближенного вычисления значений функции

- Ряд Тейлора — разложение функции в бесконечную сумму степенных функций.
- Ряд Маклорена- частный случай ряда Тейлора.

Формула Тейлора

Определение

Пусть функция f(x) бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки a. Формальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

называется рядом Тейлора функции f в точке a.

Доказательство:

Рассмотрим произвольный многочлен степени n

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $a_0 \neq 0$.

Пусть $a \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Разложим многочлен $P(x)$ по степеням $(x - a)$:

$$P(x) = b_0(x-a)^n + b_1(x-a)^{n-1} + \cdots + b_n.$$

Найдем коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_n$:

$$\begin{aligned}
&b_n = P(a),\\
&P'(x) = b_{n-1} + 2b_{n-2}(x-a) + \cdots + nb_0(x-a)^{n-1},\\
&b_{n-1} = P'(a),\\
&P''(x) = 2b_{n-2} + 6b_{n-3}(x-a) + \cdots + n(n-1)b_0(x-a)^{n-2},\\
&b_{n-2} = P''(a)/2,\\
&P^{(k)}(x) = k!b_{n-k} + \ldots,\\
&P^{(k)}(a) = k!b_{n-k},\\
&b_{n-k} = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}.
\end{aligned}$$

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

- формула Тейлора для многочленов.

Формула Маклорена

В случае, если a = 0, этот ряд также называется рядом Макло́рена.

Разложение функции в ряды Тейлора и Маклорена

Всякая функция бесконечное число раз дифференцируемая в интервале $x_0 - R < x < x_0 + R$

т.е. , может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней бесконечный степенной ряд – ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$$

Здесь Rn(x) – остаточный член формулы Тейлора

$$c = x_0 + \theta(x - x_0), \qquad 0 < \theta < 1$$

При $x_0 = 0$ из

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

получаем так называемый ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Разложение функции f (x) в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 распадается на два этапа:

1. Сначала вычисляют значения функции f (x) и ее производных в точке x_0 и составляют ряд Тейлора для функции f (x). При этом предполагается, что функция f (x) бесконечное число раз дифференцируема.

2. Находят интервал сходимости составленного ряда Тейлора к функции f (x), т.е. устанавливают, для каких значений x остаточный член ряда Rn(x) будет стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Т е о р е м а. Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, абсолютные величины всех производных функции f(x) ограничены одним и тем же числом M, т.е $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, то $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

и функция f(x) разложима в ряд Тейлора.

Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов.

Для вычисления приближенного значения функции f (x) в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n – конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности полученного приближенного значения необходимо оценить сумму отброшенных членов.

Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Если данный ряд знакочередующийся и его члены удовлетворяют признаку Лейбница, то используется оценка $|R_n| < |u_{n+1}|$, где u_n+1 – первый из отброшенных членов ряда.

Для вычисления логарифмов эффективна формула

$$\ln(t+1) = \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \ldots\right]$$

Ряд в квадратных скобках сходится тем быстрее, чем больше t.