# Тема лекции:
# Основные теоремы теории вероятностей

**Учебные вопросы.**

1. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.
2. Условные вероятности. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей.
3. Формула полной вероятностей. Формула Байеса.

**Литература**

**Основная**

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. М.:ЮНИТИ- ДАНА, 2007.
2. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под общей ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2010.

**Дополнительная**

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. Пособие для вузов. М.: Высш. шк., **2007.**

В теория вероятностей случайные события рассматриваются с точки зрения теории множеств, что позволяет определить отношения над ними.

**Первый учебный вопрос.**

**Теорема сложения вероятностей суммы несовместных событий.**

**Теорема.** *Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:*

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

**Доказательство.** Введем обозначения: n –общее число возможных элементарных исходов испытания; $m_1$-число исходов, благоприятствующих событию A; $m_2$ – число исходов, благоприятствующих событию B

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно $m_1$+$m_2$.

Следовательно,
$P(A+B)=(m_1+m_2)/n = m_1/n + m_2/n$.
Приняв во внимание, что $m_1/n = P(A)$ и $m_2/n=P(B)$, окончательно
$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B).}$

**Теорема**. Если события $A_1,\ldots, A_n$ попарно несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей, т.е.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)= P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

## Теорема сложения вероятностей совместных событий

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

**$$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB). \quad (4)$$**

**Вероятность суммы трех совместных событий равна:**

$$P(A+B+C)= P(A) +P(B) +P(C) – P(A \cdot B)- P(B \cdot C) –- -P(A \cdot C) +P(A \cdot B \cdot C).$$

## Полная группа событий

**Теорема.** Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1. \quad (2)$$

**Теорема.**

*Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:* $P(A)+P(\overline{A})=1$ (3)

Если обозначить $P(\overline{A})=q$,

P(A)=p,

то формула (3) примет вид

p+q=1.

**Пример.**

Вероятность того, что день будет дождливым, p=0,7. Найти вероятность того, что день будет ясным.

**Решение**. События «день дождливый» и « день ясный»- противоположные, поэтому искомая вероятность

q=1-p=1-0,7=0,3

**Замечание**. При решении задач на отыскание вероятности события А часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\overline{A}$ а затем найти искомую вероятность по формуле $P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A})$.

.

**Пример**. В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих и 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

**Решение**.

Вероятность вынуть красный шар $P(A)=3/10$, $P(B)=5/10$.

Так как события АВ не совместимы, то по доказанной выше теореме

$P(A+B)= P(A)+P(B)= 0,3+0,5=0,8$.

**Пример**. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую- 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает либо в первую, либо во вторую область.

**Решение**. События А- « стрелок попал в первую область» и В- « стрелок попал во вторую область»- несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$P(A+B)= P(A)+P(B)=0,45+0,35=0,80$

**Пример**. В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

**Решение**.

Пусть А- событие, состоящее в том, что вынут белый шар. Ясно, что $n=12+8=20$- число всех равновозможных случаев ( исходов опыта). Число случае, благоприятствующих событию А, равно 12, т.е. $m= 12$.

Искомая вероятность

$P(A)=12/20=0,6$.

**Пример**. В урне 30 шаров: 10 красных ,5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

***Решение.*** Появления цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A)

P(A)= 10/30=1/3.

Вероятность появления синего шара (событие B)

P(B)=5/30=1/6.

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$P(A+B)= P(A)+P(B)= 1/3+ 1/6=1/2$. 1.

**Условная вероятность. События, независимые в совокупности Теорема умножения вероятностей**

Произведением двух событий A и B называют событие (AB), состоящее в совместном появлении событий A и B.

**Зависимые и независимые события.**

Событие A называют **независимым** от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называют **зависимым** от события B, если вероятность события A зависит от того, произошло событие B или нет.

## Условная вероятность

**Определение.** *Вероятность события A , вычисленная при условии, что произошло событие B , называется условной вероятностью события A и обозначается так*: $P(A/B)$, или $P_B(A)$.

**Определение**. Два события A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого,

$$P_B(A)=p(A); \quad p_A(B)=p(B).$$

**Теорема.** Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$\mathbf{P(AB)=P(A)P_A(B)} \quad \mathbf{(1)}$$

**Замечание.** Применив формулу (1) к событию ВА, получим

$$\mathbf{P(BA)=P(B)P_B(A).} \quad \mathbf{(2)}$$

Так как AB=BA ,то

а сравнивая (1) и (2), получаем равенство

$$\mathbf{P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).}$$

**Следствие.** Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных. При этом вероятность каждого последующего события подсчитывается в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \ldots$$

$$\ldots P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n),$$

$P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$ —

где вероятность события $A_n$, вычисленная в предположении, что события $A_1$, $A_2$,…, $A_{n-1}$ наступили.

В частности, для трех событий

**P(ABC)=P(A) $P_A$(B)$P_{AB}$(C).**

**Теорема умножения для независимых событий**

Вероятность произведения двух **независимых событий** равна произведению их вероятностей: **P(AB)= P(A)P(B).**

Для трех **независимых** событий A,B,C формула принимает вид: **P(ABC)=P(A)P(B)P(C).**

**Теорема.** Вероятность совместного появления n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

**Пример.** Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) -0,7.

**Решение.** События A и B независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB)= P(A)\,P(B) = 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56.$$

**Теорема. ( о вероятности наступления хотя бы одного из n независимых событий).**

**Теорема.** Если **события $A_1,A_2,\ldots,A_n$** независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий (т.е. вероятность суммы) вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n).$$

**Пример**. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1$=0,8; $p_2$=0,7; $p_3$=0,9.

Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

**Решение**. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события $A_1$ (попадание первого орудия), $A_2$ ( попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям $A_1$, $A_2$ и $A_3$ (т.е. вероятности промахов), соответственно равны:

$q_1=1-p_1=1-0,8=0,2;$

$q_2=1-p_2=1-0,7=0,3;$

$q_3=1-p_3=1-0,9=0,1.$

Искомая вероятность

$P(A)=1-q_1q_2q_3= 1-0,2\cdot 0,3\cdot 0,1=0,994.$

**Третий учебный вопрос**

**Формула полной вероятности. Формула Байеса.**

*Следствием основных теорем вероятностей – теорем сложения и умножения вероятностей – является формула полной вероятностей.*

**Постановка задачи.**

Допустим событие А может наступает при появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Эти события образуют полную группу. Такие события $B_i$ называются **гипотезами.**

Также даны вероятности этих событий и условные вероятности

$$P_{B_1}(A),\ \ P_{B_1}(A),...,\ P_{B_n}(A)$$

события А. Для нахождения вероятности события А можно воспользоваться следующей теоремой.

**Теорема (*формула полной вероятности*)**

Пусть несовместные события $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образуют полную группу. Тогда вероятность события А, которое может наступить только при условии появления одного из этих несовместных событий равняется сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots$$

$$\ldots + P(B_n)P_{B_n}(A),$$

где $P(B_1)$- вероятность события $B_1$ ;
$P(B_2)$ - вероятность
события $B_2$ ;
$P(B_i)$ - вероятность
события $B_i$ ;
$P_{B_i}(A)-$ условная вероятность события A при условии, что произошло событие $B_i$ .

Эту формулу называют
« формулой полной вероятности».

**Пример**. В магазин поступает изделия с двух фабрик, причем 40% из них изготовлены фабрикой №1, а остальные – фабрикой №2. Фабрика №1 дает 90% изделий первого сорта, а фабрикой №2 75%. Какова вероятность того, что купленное наудачу изделие окажется первого сорта?

**Решение**. Рассмотрим события:

А изделие, купленное наудачу, первого сорта;

$B_1$- изделие произведено на фабрике №1;

Так как событие A может состояться лишь при условии выполнения одной из гипотез $B_1$ или $B_2$, то по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A).$$

Найдем вероятности гипотез, входящие в эту формулу. Так как на каждые 100 поступивших в магазин изделий 40 изготовлено фабрикой №1 (40%), а остальные 60 – фабрикой №2, то

$P(B_1)=40/100=0,4;$

$P(B_2)=60/100=0,6$

По условию задачи

$$P_{B_1}(A) = 0{,}9;$$

$$P_{B_2}(A) = 0{,}75;$$

Подставляя найденные вероятности в формулу (**), получим:

$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}75=0{,}81$

## Вывод формулы Байеса . Примеры.

**Задача**. Имеется полная группа несовместных гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$, вероятность которых $P(B_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ известных до опыта (вероятности априори). Производится опыт (испытание), в результате которого зарегистрировано появление события А, причем известно, что этому событию наши гипотезы приписывали определенные вероятности

$$P_i(A) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда вероятность появления события А равна:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Найдем условные вероятности

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),...,P_A(B_n).$$

В соответствии с теоремой умножения условная вероятность $P_A(B_1)$ равна:

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A),$$

Тогда $$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

После преобразований получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Эти формулы носят название формул Байеса, благодаря которым можно оценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в результате которого появилось событие А.

**Примеры**. В цехе работают 20 станков, изготавливающих одинаковые детали. Из них 10 станков- 1-го типа, 6станков – 2-го типа, а остальные – 3-го типа.

Вероятности того, что качество детали окажется отличным на станках этих типов, равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Производительность всех типов станков одинакова.

Условная вероятность любой гипотезы $B_i$ ($i=1,2,3,\ldots,n$) рассчитывается следующим образом:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Какова вероятность, что наугад взятая деталь, изготовленная в цехе, окажется отличного качества?

Наугад взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность , что она была изготовлена на станке 1-го типа?

**Решение.**

Обозначим события:

А- наугад взятая деталь отличного качества;

$B_1$ - наугад взятая деталь изготовлена на станке 1-го типа;

$B_2$ - наугад взятая деталь изготовлена на станке 2-го типа;

$B_3$ - наугад взятая деталь изготовлена на станке

3 -го типа;

Так как производительность всех типов станков одинакова, то количество деталей, изготовленных на станках данного типа, пропорционально количеству станков. Поэтому

$P(B_1)=10/20=0,5;$

$P(B_2)=6/20=0,3;$

$P(B_3)=4/20=0,2$

Вероятности $p_{B_i}(A)$ даны в условии задачи:

$P_{B_1}(A) = 0{,}9;$

$P_{B_2}(A) = 0{,}8;$

$P_{B_3}(A) = 0{,}7.$

1. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}83;$$

2. По формуле Байеса получим ответ на второй вопрос

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}83} = 0{,}54.$$