Практическое занятие №1

ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТАМ

Основные вопросы

- 1. Наращение по простым процентам
- 2. Обыкновенные (коммерческие) и точные проценты
- 3. Переменные процентные ставки
- 4. Математическое дисконтирование по простым процентам
- 5. Банковское дисконтирование (учет) по простым процентам
- 6. Финансовая эквивалентность обязательств. Изменение условий платежей.

1. Наращение по простым процентам

Начисление простых процентов может происходить дискретно в зависимости от условий договора раз в год, полугодие, квартал или месяц. Иногда проценты начисляют и за более короткий срок.

- Пусть задана исходная стоимость денег *PV*. Наращенную (будущую) сумму денег через определенный период обозначим через *FV* ;
- Число процентных периодов, т.е. периодов начисления процентов – *n* ;
- Ставка процентов за период - *i*.

- Тогда простые обычные проценты за один процентный период начисляются следующим образом: $PV \cdot i.$
- Следовательно, в конце первого процентного периода сумма денег составит

$$PV + PV \cdot i = PV(1+i).$$

- В конце второго процентного периода сумма увеличится еще на $PV \cdot i$ и составит: $PV(1+i) + PV \cdot i = PV(1+2i)$
- В конце третьего - $PV(1+2i) + PV \cdot i = PV(1+3i)$ и т.д.
- Наконец, в конце n-го процентного периода наращенная сумма составит:

$$PV \cdot [1+(n-1)\cdot i] + PV \cdot i = PV(1+ni)$$

- Таким образом, процесс наращения суммы денег за счет начисления простых процентов моделируется как арифметическая прогрессия с первым членом PV и разностью $PV \cdot i$. Следовательно, наращенная сумма денег за счет начисления простых процентов за процентных периодов времени имеет вид:
- $$FV = PV\left(1 + in\right)$$

- Множитель $(1+in)$ называется множителем наращения простых процентов. Он показывает, во сколько раз увеличилась сумма вклада (или долга) к концу срока финансовой операции.
- Сумма начисленных процентных денег может быть определена по формуле: $D = FV - PV$
- Разность $FV - PV$ называется *дисконтом*.

Пример

- Вклад 100 000 рублей размещен в сберегательный банк на 3 года под обычные простые проценты 4,5 % годовых. Определите наращенную сумму вклада.
- Решение:
- Найдем наращенную сумму вклада:

$$PV = 100000 \quad руб.;\; i = 0{,}045;\; n = 3 \quad года.$$

$$FV = PV(1 + in) = 100000 \cdot (1 + 0{,}045 \cdot 3) = 100000 \cdot 1{,}135 = 113500 \quad руб.$$

- Наращение суммы вклада (процентные деньги) составит 13500 рублей.

2. Обыкновенные (коммерческие) и точные проценты

- В случае, если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, периоды начисления процентов *n* выражают дробным числом, как отношение продолжительности финансовой сделки в днях к количеству дней в году (или отношение продолжительности финансовой сделки в месяцах к числу месяцев в году).

- Обозначим срок операции t (time). В качестве временной базы выберем продолжительность года, выраженную в тех же единицах, что и t. Обозначим ее Y (year-год).
- Подставим отношение $\frac{t}{Y}$ вместо n в формулу $FV = PV(1+in)$. получим следующую формулу:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right)$$

- Отметим, что при использовании последней формулы размерности n и i должны быть согласованы. Если n измеряется в годах, то i – ставка годовых процентов (показывает рост за год).
- Иногда при расчете простых процентов предполагают, что год состоит из 12 месяцев по 30 дней в каждом. Проценты, рассчитанные по временной базе Y=360 дней, называются *обыкновенными* или *коммерческими* процентами (ordinary interest). При использовании действительной продолжительности года (365 или 366 дней) получают *точные* проценты (exact interest).

- Число дней финансовой операции также можно измерить приближенно и точно. В первом случае ее продолжительность определяется из условия, согласно которому месяц принимается равным 30 дням. Точное число дней финансовой операции определяется путем подсчета числа дней между датой ее начала и датой ее окончания по календарю. Первый и последний день финансовой операции считается за один день.

- На практике для подсчета ее продолжительности можно пользоваться табл. 1 и 2 (приложение 2).
- В таблицах приведены порядковые номера дней в году (для обычного и високосного годов соответственно). Срок проведения финансовой операции рассчитывается как разность между порядковыми номерами даты ее окончания и даты начала.

Три варианта расчетов

- 1. Точные проценты с точным числом дней ссуды.
- Этот вариант дает самые точные результаты. Он обозначается 365/365. Применяется центральными банками многих стран и крупными коммерческими банками, например в Великобритании.

- 2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.
- Этот метод, иногда называемый банковским (Banker’s Rule), распространен в ссудных операциях коммерческих банков, в частности во Франции. Он обозначается как 365/360. Этот вариант дает несколько больший результат, чем применение точных процентов.

- 3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.
- Такой метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах. Он принят в практике коммерческих банков Германии. Этот метод обозначается как 360/360.
- Вариант расчета с точными процентами и приближенным числом дней ссуды лишен смысла и не применяется.

Пример

- Ссуда в размере 1млн. рублей выдана 20 января до 5 октября включительно под простые проценты 18% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока?

Число дней ссуды:

- а) точное

20 января - №20

5 октября - №278

$t=278-20=258$ дней

в) приближенное

с 20 января по 20 сентября – 8 полных месяцев;

с 20 сентября по 5 октября – 15 дней

$t=30 \cdot 8+15= 240+15=255$ дней

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365)

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right) =$$

$$= 1000000 \cdot \left(1 + \frac{258}{365} \cdot 0{,}18\right) =$$

$$= 1127232{,}88 \, \textit{рублей}$$

2.Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360)

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right) =$$

$$= 1000000 \cdot \left(1 + \frac{255}{360} \cdot 0{,}18\right) =$$

$$= 1127500\, \textit{рублей}$$

3.Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360)

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right) =$$

$$= 1000000 \cdot \left(1 + \frac{258}{360} \cdot 0{,}18\right) =$$

$$= 1129000\,\textit{рублей}$$

Переменные процентные ставки

В течение периода времени n_1

действует ставка простых процентов i_1

Начисленные проценты составят: $PV \cdot n_1 \cdot i_1$

В течение периода времени n_2

действует ставка простых процентов i_2

Начисленные проценты составят: $PV \cdot n_2 \cdot i_2$

....

В течение периода времени n_m

действует ставка простых процентов i_m

Начисленные проценты составят: $PV \cdot n_m \cdot i_m$

Формула наращения по переменной ставке процента:

$$FV = PV + PV \cdot n_1 \cdot i_1 + PV \cdot n_2 \cdot i_2 + ... + PV \cdot n_m \cdot i_m =$$

$$= PV \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + ... + n_m \cdot i_m)$$

$$FV = PV \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + ... + n_m \cdot i_m)$$

Пример

- Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие процентная ставка 12% годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 2,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада.
- Определите наращенную за год сумму, если вкладчик поместил в банк на этих условиях 400,0 тыс. руб.

Решение:

$$PV = 400 тыс. рублей; n_1 = 0{,}5; i_1 = 0{,}12;$$

$$n_2 = 0{,}25; i_2 = 0{,}145; n_3 = 0{,}25; i_3 = 0{,}17.$$

$$FV = PV \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \ldots + n_m \cdot i_m) =$$

$$= 400(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}12 + 0{,}25 \cdot 0{,}145 + 0{,}25 \cdot 0{,}17) =$$

$$= 400(1 + 0{,}060 + 0{,}036 + 0{,}043) = 400 \cdot 1{,}139 =$$

$$= 455{,}6 тыс. рублей$$

4.Математическое дисконтирование по простым процентам

- Выразив из формулы наращения PV, получим формулу математического дисконтирования по простым процентам:

$$PV = \frac{FV}{1 + ni}$$

$\frac{1}{1+ni}$ - дисконтный множитель, показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в его окончательной сумме.

Пример

- Заемщик должен возвратить кредит единовременным платежом с процентами за период 2 года. Проценты по кредиту составили 12% годовых. Какую сумму получил заемщик в момент заключения кредитного договора и чему равен дисконт, если сумма к возврату составляет 1 500 000 рублей?

Решение:

- *FV=1 500 000 рублей;*
n=2 года; i = 0,12

$$PV = \frac{FV}{1+ni} = \frac{1500000}{1+2\cdot 0{,}12} = 1209677 \text{ рублей}$$

$$D = 1500000 - 1209677 = 290323 \text{ рубля}.$$

Формула математического дисконтирования для n<1:

В случае если срок финансовой операции задан в днях или в месяцах, из формулы $PV = \frac{FV}{1+ni}$ получим формулу математического дисконтирования для n<1:

$$PV = \frac{FV}{1 + \frac{t}{Y} \cdot i},$$

где *t* - длительность финансовой операции в днях (в месяцах); *Y*- число дней (месяцев в году).

Пример

- Какую сумму инвестор должен внести сегодня под 16% годовых, чтобы через 180 дней после подписания договора накопить 310 тыс. руб. при условии, что начисляются простые точные проценты?

Решение

- *FV*=310 000 рублей; *t* =180 дней; *i* =0,16; Y=365 дней.

$$PV = \frac{FV}{1+\frac{t}{Y}\cdot i} = \frac{310000}{1+\frac{180}{365}\cdot 0{,}16} =$$

$$= \frac{310000}{1{,}078904} = 287328{,}6\,\textit{рублей}$$

$$D = 310000 - 287328{,}6 = 22671{,}4\,\textit{рублей}$$

5. Банковское дисконтирование (учет)

- При начислении *авансовых* процентов доход, получаемый кредитором, начисляется в начале периода финансовой операции относительно конечной суммы долга и выплачивается в момент предоставления кредита.
- Операция предварительного начисления процентов называется *дисконтированием по учетной ставке*, а также *банковским* или *коммерческим учетом*.
- Банковский, или коммерческий учет используется при операциях с векселями и другими краткосрочными обязательствами.

- Применительно к учету векселя, это означает, что проценты начисляются на сумму, которую должен выплатить должник в конце срока векселя.
- Ставка, по которой в этом случае начисляются проценты, отличается от обычной (декурсивной) ставки процентов *i*. Она называется учетной или дисконтной ставкой и обозначается *d*.

- По определению учетная ставка находится по формуле:

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n}$$

- В соответствии с этим размер дисконта, удерживаемого банком, будет равен:

$$D = FV \cdot n \cdot d$$

- Расчет суммы, получаемой владельцем при учете векселя в банке, производится по формуле:

$$PV = FV - FV \cdot n \cdot d = FV(1 - n \cdot d)$$

- Таким образом, формула банковского или коммерческого учета имеет вид:

$$PV = FV(1 - n \cdot d)$$

- Здесь $1 - n \cdot d$ – банковский дисконтный множитель.
- В случае, если срок финансовой операции задан в днях или в месяцах:
- $$PV = FV\left(1 - \frac{t}{Y} \cdot d\right)$$
- где t - срок вексельного кредита в днях (в месяцах); Y - число дней (месяцев в году). Обычно при вексельных расчетах принимают Y =360 дней.

- Операция учета векселя имеет смысл только в том случае, если выполняется неравенство:

$$1 - n \cdot d \geq 0,$$

$$n \leq \frac{1}{d}$$

В противном случае сумма, которую должен получить владелец векселя при его учете, становится равной нулю или даже отрицательной, что лишено смысла.

Пример

- Вексель со сроком погашения 17 ноября выдан на сумму 1 млн. руб. Владелец векселя учел его в банке 23 сентября по учетной ставке 20 %.Определите полученную при учете сумму (без уплаты комиссионных) и дисконт.

Решение:

- *FV=1000 000 рублей*; *d =0,2*;

  17 ноября - №321;

  23 сентября - № 266;

t =266-321=55дней; *Y =360дней*.

$$PV = FV\left(1 - \frac{t}{Y} \cdot d\right) =$$

$$= 1000000 \cdot \left(1 - \frac{55}{360} \cdot 0{,}2\right) = 969444\,руб.$$

D= 1000000-969444 = 30 556 рублей.

Финансовая эквивалентность обязательств

- В финансовой практике часто возникают ситуации, когда необходимо заменить одно обязательство другим, например с более отдаленным сроком платежа, досрочно погасить задолженность, объединить несколько платежей в один, изменить схему начисления процентов и т.п. В таких случаях возникает вопрос о том, на каких принципах должно основываться изменение контракта.
- На практике в качестве такого принципа наиболее часто применяется *принцип финансовой эквивалентности обязательств*, позволяющий сохранить баланс интересов сторон контракта. Этот принцип предполагает неизменность финансовых отношений до и после изменения условий контракта.

6. Финансовая эквивалентность обязательств

- При изменении условий платежей для реализации названного принципа необходимо учитывать разновременность платежей, которые производятся в ходе выполнения условий контракта до и после его изменения.
- *Эквивалентными* считаются такие *платежи*, которые оказываются равными после их приведения по заданной процентной ставке к одному моменту времени, либо после приведения одного из них к моменту наступления другого по заданной процентной ставке.

Пример

- Выясните, являются ли эквивалентными два обязательства, если по одному из них должно быть выплачено 2 млн. рублей через 2 года, а по второму – 2,5 млн. рублей через 3 года. Для сравнения применить сложную процентную ставку 15% годовых.
- Решение:

$$FV_1 = 2000000\,руб.; n_1 = 2\,года; FV_2 = 2500000\,руб.; n_2 = 3\,года, i = 0{,}15.$$

Найдем современную стоимость этих платежей.

$$PV_1 = \frac{2000000}{(1+0{,}15)^2} = \frac{2000000}{1{,}3225} = 1512287{,}33\,руб.$$

$$PV_2 = \frac{2500000}{(1+0{,}15)^3} = \frac{2500000}{1{,}520875} = 1643790{,}58\,руб.$$

6.1. Изменение условий платежей

- *Принцип финансовой эквивалентности обязательств* осуществляется *методом приведения* платежей к одному моменту времени с помощью операций наращения и дисконтирования.
- При применении метода приведения следует, прежде всего, выбрать *базовый момент времени*, т.е. момент к которому предполагается приведение всех сумм в расчете.

- Дисконтирование применяется, если необходимо привести платежи к более ранней дате, наращение - когда базовый момент времени относится к будущему.
- Уравнение эквивалентности:

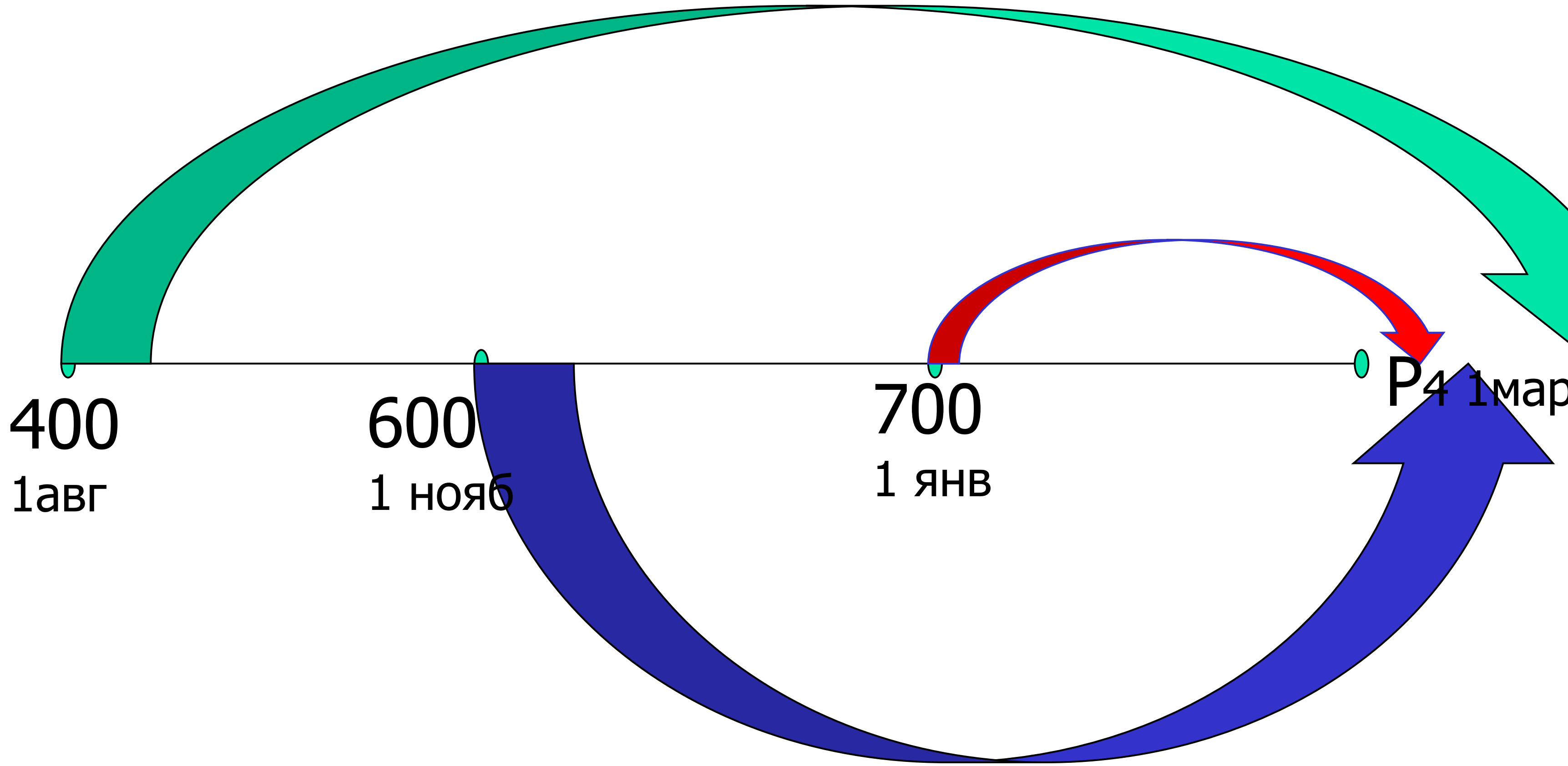
  Сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени.

Пример

- Имеются два кредитных обязательства 400 тыс. руб. и 700 тыс. руб. со сроками уплаты 1 августа и 1 января (следующего года). По согласованию сторон условия обязательств пересмотрены: первый платеж в размере 600 тыс. рублей должник вносит 1 ноября, остальной долг он выплачивает 1 марта. Определите величину второго платежа, если в расчетах используется простая процентная ставка 20% годовых. Проценты точные.

Схема приведения платежей к одному моменту времени

- За базовую дату примем дату искомого платежа. Все остальные платежи приведем к этой дате – 1 марта



- Решение:
- Срок от 1 августа (P_1=400 тыс. руб.) до 1 марта составляет 212 дней (365-213+60).
- Срок от 1 января (P_2=700 тыс. руб.) до 1 марта составляет 59 дней (60-1).
- Срок от 1 ноября (P_3 =600 тыс. руб.) до 1 марта составляет 120 дней (365-305+60).
- Уравнение эквивалентности:

$$400 \cdot \left(1 + \frac{212}{365} \cdot 0{,}2\right) + 700 \cdot \left(1 + \frac{59}{365} \cdot 0{,}2\right) =$$

$$= 600 \cdot \left(1 + \frac{120}{365} \cdot 0{,}2\right) + P_4.$$

$$446{,}47 + 722{,}63 = 639{,}45 + P_4,$$

P_4=529,65 тыс. руб.