Финансовые вычисления по сложным процентам

Наращение

Основные вопросы

- 1. Формула наращения по сложным процентам
- 2. Переменные ставки процента
- 3. Наращение при дробном числе лет
- 4. Смешанный метод наращения
- 5. Сравнение множителей наращения по простым и сложным процентам
- 6. Условия эквивалентности простой и сложной процентных ставок
- 7. Наращение процентов m раз в году
- 8. Номинальная и эффективная процентные ставки

Наращение по сложным процентам

- В среднесрочных и долгосрочных финансово-кредитных операциях в случае, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, для наращения применяются сложные проценты.
- База для начисления сложных процентов увеличивается с каждым периодом выплат.
- Присоединение начисленных процентов к сумме долга, которая служит базой для их начисления, называется капитализацией процентов.

Формула наращения по сложным процентам

- Предположим, клиент положил в банк сумму, равную *PV* рублей, под i процентов годовых.

К концу 1-го процентного периода сумма на счете составит: $PV + PV \cdot i = PV(1+i)$

Полученная сумма может быть вновь инвестирована под процентную ставку на следующий процентный период. К концу 2-го периода сумма на счете составит:

$$PV(1+i) + [PV(1+i)] \cdot i = [PV(1+i)] \cdot (1+i) = PV(1+i)^2$$

К концу 3-го периода:

$$PV(1+i)^2 + [PV(1+i)^2] \cdot i = [PV(1+i)^2] \cdot (1+i) = PV(1+i)^3$$

....

К концу *n*-го периода: $PV(1+i)^n$

Следовательно, формула для расчета наращенной суммы в конце n -го года при условии, что проценты начисляются один раз в году, имеют вид:

$$FV = PV(1+i)^n,$$

где PV - первоначальный размер долга (вклада);

i – процентная ставка ;

n – продолжительность финансовой операции (лет).

Величина $(1+i)^n$ называется множителем наращения по сложным процентам.

Пример

- Какой величины достигнет долг, равный 1000 000 рублей, через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых? Определите величину дисконта.
- Решение: PV = 1000 000 рублей; i = 0,155; n =5.

$$FV = PV(1+i)^n = 1000000(1+0{,}155)^5 =$$

$$= 2055464{,}2\,руб.$$

$$D = 2055464{,}2 - 1000000 = 1055464{,}2\,руб.$$

Переменные ставки сложных процентов

- Неустойчивость кредитно-денежного рынка заставляет модернизировать «классическую» схему, например, с помощью применения изменяющихся во времени переменных ставок.
- Пусть $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k$ - последовательные во времени значения процентных ставок;
- $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ - периоды, в течение которых используются соответствующие ставки. Тогда наращенная сумма:

$$FV = PV(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \ldots (1+i_k)^{n_k}$$

Пример

- Ссуда в размере 1000 000 рублей выдана на 5 лет под 12% годовых плюс маржа 0,5% в первые два года и 0,75% - в оставшиеся. Определите наращенную величину долга.

- Решение:

$$PV = 1000000; n = 5 лет; i_1 = 0,12 + 0,005 = 0,125; n_1 = 2 года;$$

$$i_2 = 0,12 + 0,0075 = 0,1275; n_2 = 3 года.$$

$$FV = PV(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} =$$

$$= 1000000(1 + 0,125)^2 \cdot (1 + 0,1275)^3 =$$

$$= 1000000 \cdot 1,265625 \cdot 1,433341 = 1814072\ руб.$$

Наращение при дробном числе лет

- Наращение по сложной процентной ставке при дробном числе лет может производится двумя методами: точным и смешанным.
- Точный метод
- Подставив в формулу: $FV = PV(1+i)^n$

$$n = \frac{t}{Y},$$

- получим

$$FV = PV(1+i)^{\frac{t}{Y}}$$

Пример

- 13 января в банк положили сумму 1000$ до востребования под ставку сложных процентов 6% годовых. Какую сумму снимет вкладчик 1 сентября?
- Решение:

13 января - № 13

1 сентября - № 244

t=244-13=231; PV=1000$; i=0,06.

$$FV = PV(1+i)^{\frac{t}{Y}} = 1000 \cdot (1+0{,}06)^{\frac{231}{360}} =$$

$$= 1000 \cdot 1{,}06^{0{,}642} = 1000 \cdot 1{,}038 = 1038\$$$

Наращение при дробном числе лет.

- Смешанный метод предусматривает применение на разных временных -интервалах различных схем начисления процентов: для n>1 – схема сложных процентов; для n<1 – простых.

$$FV = PV(1+i)^a \cdot (1+bi)$$

- Здесь a – целое число лет;

b –дробная часть года.

Пример

- Кредит в размере 300 тыс. руб. выдан на 3 года и 160 дней под 16,5% сложных годовых. Проценты точные. Найдите сумму долга на конец срока двумя методами.
- Решение:
- *PV=300 000 рублей; i= 0,165*

n=3+(160:365)=3,43836.

а) Точный метод:

$$FV = PV(1+i)^n = 300000(1+0{,}165)^{3{,}43836} =$$

$$= 507193{,}5\,\textit{рублей}$$

б) Смешанный метод:

$$FV = PV(1+i)^a \cdot (1+bi) = 300000(1+0{,}165)^3 \cdot (1+0{,}43836 \cdot 0{,}165) =$$
$$= 508659{,}8\, рублей$$

Как видим, смешанный метод дает несколько завышенный результат.

Вывод. Если начисление процентов происходит за период, превышающий один год, и при этом период финансовой операции, выраженный в годах, является дробным числом, то с точки зрения инвестора (кредитора) наибольший эффект может быть получен при начислении процентов по смешанной схеме начисления процентов.

Сравнение множителей наращения по простым и сложным процентам.

- Для того чтобы выяснить, какой схемой начисления процентов целесообразно пользоваться при проведении долгосрочных и среднесрочных финансовых операций, и какой – при проведении краткосрочных, сравним величины множителей наращения по простым и по сложным процентам. Для этого выберем единый уровень процентной ставки, равный 10% годовых. Временной базой будем считать год, равный 365 дням.

Расчет множителей наращения по простым и сложным процентам для *i=0,1*

- t=30 дней: а) $$1+\frac{30}{365}\cdot 0{,}1=1{,}0082$$

  б) $$(1+0{,}1)^{\frac{30}{365}}=1{,}0079$$

- t=10 лет: а) $$1+10\cdot 0{,}1=2{,}0$$

  б) $$(1+0{,}1)^{10}=2{,}5937$$

Значения множителей наращения занесем в таблицу.

Сравнение множителей наращения по простым и сложным процентам

Способ начисления	Значения множителей наращения в зависимости от срока операции					
	30 дней	180 дней	1 год	5 лет	10 лет	20 лет
Простые проценты	1,0082	1,0493	1,10	1,5	2,0	3,0
Сложные проценты	1,0079	1,0481	1,10	1,6105	2,5937	6,7275

При $0<n<1$ $(1+i)^n<1+n\cdot i$; при $n>1$ $(1+i)^n>1+n\cdot i$;
При $n=1$ значения множителей наращения равны.

Эквивалентность процентных ставок

- ***Эквивалентными*** называют процентные ставки, которые при замене одной на другую приводят к одинаковым финансовым результатам. В этом случае отношения сторон не изменяются в рамках одной финансовой операции.

Условия эквивалентности простой и сложной процентных ставок

- Определим соотношение эквивалентности между простой процентной ставкой наращения и сложной процентной ставкой.
- Для решения поставленной цели приравняем множители наращения другу: $1+i\cdot n=(1+j)^n$,

где i - простая процентная ставка;

j – сложная процентная ставка;

n – срок финансовой операции в годах.

Решим это уравнение относительно i и j.

$$i=\frac{(1+j)^n-1}{n}.\qquad j=\sqrt[n]{1+ni}-1.$$

Пример

- Кредит предоставлен под 20% простых годовых на полгода. Определите доходность финансовой операции в виде сложной годовой процентной ставки.

  - Решение:

- *i =0,2;   n = 0,5.*

$$j = \sqrt[n]{1+ni} - 1 = \sqrt[0,5]{1+0,5\cdot 0,2} - 1 =$$

$$= (1+0,1)^2 - 1 = 1,21 - 1 = 0,21$$

- Ответ: 21%

Наращение процентов m раз в году

- Иногда в финансовых операциях в качестве периода наращения процентов используется не год, а, например, полугодие, квартал, месяц или другой период времени. В этом случае проценты начисляются m раз в году.
- В контрактах, как правило, фиксируется не ставка за процентный период, а годовая ставка процентов, которая в этом случае называется номинальной.

Наращение процентов m раз в году

- Пусть годовая (номинальная) ставка равна *i*.
- Срок финансовой операции *n* лет.
- Число периодов начисления процентов *m* раз в год.
- Проценты каждый раз начисляются по ставке *i/m*.
- Количество начислений процентов составит *m·n.*
- Формула наращения в этом случае:

$$FV = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

Пример

- Какой величины достигнет долг, равный 100 000 рублей через 5 лет при ставке 15,5% сложных годовых, если проценты начисляются ежеквартально?
- Решение:
- *PV= 100 000 рублей;*

n=5 лет;   i= 0,155; m= 4.

$$FV = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = 100000\left(1+\frac{0,155}{4}\right)^{4\cdot 5} =$$

$$= 213904,9\,\text{рублей}$$

Номинальная и эффективная ставка процентов

- Предположим, согласно договору годовая процентная ставка *i=12%.* Проценты начисляются ежеквартально.
- Тогда количество начислений в год $m = 4$, а начисление будет производиться по ставке

$$\frac{i}{m} = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03.$$

- За год множитель наращения составит

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = (1 + 0{,}03)^4 = 1{,}1255$$

- Таким образом, эффективная (фактическая) ставка наращения – 12,5%, а объявленная номинальная ставка – 12%.

- **Эффективная ставка процента** измеряет тот реальный доход, который получают в целом за год от начисления процентов.
- **Номинальной** называется процентная ставка, используемая для расчетов, для фиксирования в договорах.
- Эффективная годовая ставка а *f* может быть определена из уравнения:

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^m = 1+f,$$

- Таким образом:

$$f = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1.$$

Пример

- Найдите эффективную ставку процента, если номинальная ставка равна 24% при ежемесячном начислении процентов.
- Решение:
- *i=0,24; m=12.*

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12} - 1 = 0,268$$

- *Ответ: 26,8%.*

Номинальная и эффективная учетные ставки

- Номинальная учетная ставка *d* используется в контрактах. Эффективная учетная ставка *f* характеризует фактическое дисконтирование за год. Ее можно определить из равенства:

$$1 - f = \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m, \quad \text{тогда}$$

$$f = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m$$

Для одних и тех же условий эффективная учетная ставка меньше номинальной.

Пример

- Ценная бумага на сумму 500000 рублей, срок платежа по которой наступает через 3 года, продана с дисконтом по номинальной учетной ставке 12% при помесячном дисконтировании. Определите сумму дисконта и эффективную учетную ставку.
- Решение: $FV = 500000\, руб.; n = 3 \quad года; d = 0{,}12; m = 12.$

$$PV = 500000\left(1 - \frac{0{,}12}{12}\right)^{12\cdot 3} = 500000 \cdot 0{,}696413 = 348206{,}5\, рублей$$

$$D = 500000 - 348206{,}5 = 151793{,}5\, рублей$$

- $f = 1 - \left(1 - \frac{0{,}12}{12}\right)^{12} = 0{,}1136$ то есть 11,36%.