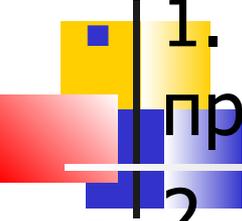


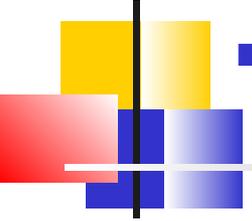
Финансовые вычисления по сложным процентам

Наращение

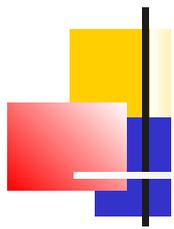
Основные вопросы

- 
1. Формула наращенения по сложным процентам
 2. Переменные ставки процента
 3. Наращение при дробном числе лет
 4. Смешанный метод наращенения
 5. Сравнение множителей наращенения по простым и сложным процентам
 6. Условия эквивалентности простой и сложной процентных ставок
 7. Наращение процентов m раз в году
 8. Номинальная и эффективная процентные ставки
-

Наращение по сложным процентам

- 
- В среднесрочных и долгосрочных финансово-кредитных операциях в случае, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, для наращивания применяются **сложные проценты**.
 - База для начисления сложных процентов увеличивается с каждым периодом выплат.
 - Присоединение начисленных процентов к сумме долга, которая служит базой для их начисления, называется **капитализацией процентов**.

Формула наращенения по сложным процентам



- Предположим, клиент положил в банк сумму, равную PV рублей, под i процентов годовых.

К концу 1-го процентного периода сумма на счете составит: $PV + PV \cdot i = PV(1 + i)$

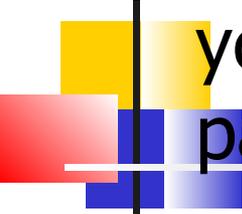
Полученная сумма может быть вновь инвестирована под процентную ставку на следующий процентный период. К концу 2-го периода сумма на счете составит:

$$PV(1 + i) + [PV(1 + i)] \cdot i = [PV(1 + i)] \cdot (1 + i) = PV(1 + i)^2$$

К концу 3-го периода:

$$\underline{PV(1 + i)^2 + [PV(1 + i)^2] \cdot i = [PV(1 + i)^2] \cdot (1 + i) = PV(1 + i)^3}$$

К концу n -го периода: $PV(1 + i)^n$



Следовательно, формула для расчета наращенной суммы в конце n -го года при условии, что проценты начисляются один раз в году, имеют вид:

$$FV = PV(1 + i)^n,$$

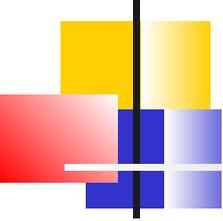
где PV - первоначальный размер долга (вклада);

i – процентная ставка ;

n – продолжительность финансовой операции (лет).

Величина $(1 + i)^n$ называется множителем наращения по сложным процентам.

Пример

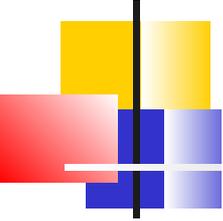
- 
- Какой величины достигнет долг, равный 1000 000 рублей, через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых? Определите величину дисконта.

- Решение: $PV = 1000\ 000$ рублей;
 $i = 0,155$; $n = 5$.

$$FV = PV(1 + i)^n = 1000000(1 + 0,155)^5 = 2055464,2 \text{ руб.}$$

$$D = 2055464,2 - 1000000 = 1055464,2 \text{ руб.}$$

Переменные ставки сложных процентов

- 
- Неустойчивость кредитно-денежного рынка заставляет модернизировать «классическую» схему, например, с помощью применения изменяющихся во времени переменных ставок.
 - Пусть $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$ - последовательные во времени значения процентных ставок;
 - $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ - периоды, в течение которых используются соответствующие ставки. Тогда наращенная сумма:

$$FV = PV (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}$$

Пример

- Ссуда в размере 1000 000 рублей выдана на 5 лет под 12% годовых плюс маржа 0,5% в первые два года и 0,75% - в оставшиеся. Определите наращенную величину долга.

- Решение:

$$PV = 1000000; n = 5 \text{ лет}; i_1 = 0,12 + 0,005 = 0,125; n_1 = 2 \text{ года};$$

$$i_2 = 0,12 + 0,0075 = 0,1275; n_2 = 3 \text{ года}.$$

$$FV = PV(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} =$$

$$= 1000000(1 + 0,125)^2 \cdot (1 + 0,1275)^3 =$$

$$= 1000000 \cdot 1,265625 \cdot 1,433341 = 1814072 \text{ руб.}$$

Наращение при любом числе лет

- Наращение по сложной процентной ставке при дробном числе лет может производиться двумя методами: точным и смешанным.

- Точный метод

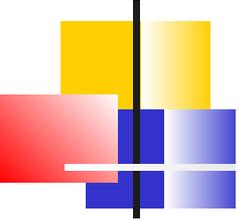
- Подставив в формулу: $FV = PV(1 + i)^n$

$$n = \frac{t}{Y},$$

- получим

$$FV = PV(1 + i)^{\frac{t}{Y}}$$

Пример

- 
- 13 января в банк положили сумму 1000\$ до востребования под ставку сложных процентов 6% годовых. Какую сумму снимет вкладчик 1 сентября?

- Решение:

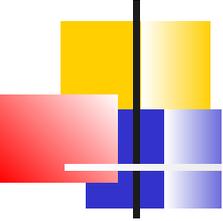
13 января - № 13

1 сентября - № 244

$t=244-13=231; PV=1000\$; i=0,06.$

$$\begin{aligned} FV &= PV(1+i)^{\frac{t}{Y}} = 1000 \cdot (1+0,06)^{\frac{231}{360}} = \\ &= 1000 \cdot 1,06^{0,642} = 1000 \cdot 1,038 = 1038\$ \end{aligned}$$

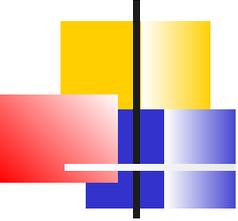
Наращение при дробном числе лет.

- 
- Смешанный метод предусматривает применение на разных временных интервалах различных схем начисления процентов: для $n > 1$ – схема сложных процентов; для $n < 1$ – простых.

$$FV = PV (1 + i)^a \cdot (1 + bi)$$

- Здесь a – целое число лет;
 b – дробная часть года.

Пример

- 
- Кредит в размере 300 тыс. руб. выдан на 3 года и 160 дней под 16,5% сложных годовых. Проценты точные. Найдите сумму долга на конец срока двумя методами.

- Решение:

- $PV=300\ 000$ рублей; $i=0,165$

$$n=3+(160:365)=3,43836.$$

а) Точный метод:

$$\begin{aligned} FV &= PV(1+i)^n = 300000(1+0,165)^{3,43836} = \\ &= 507193,5 \text{ рублей} \end{aligned}$$

б) Смешанный метод:

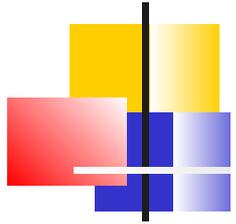
$$FV = PV(1+i)^a \cdot (1+bi) = 300000(1+0,165)^3 \cdot (1+0,43836 \cdot 0,165) =$$

= 508659,8 рублей

Как видим, смешанный метод дает несколько завышенный результат.

Вывод. Если начисление процентов происходит за период, превышающий один год, и при этом период финансовой операции, выраженный в годах, является дробным числом, то с точки зрения инвестора (кредитора) наибольший эффект может быть получен при начислении процентов по смешанной схеме начисления процентов.

Сравнение множителей наращенения по простым и сложным процентам.



- Для того чтобы выяснить, какой схемой начисления процентов целесообразно пользоваться при проведении долгосрочных и среднесрочных финансовых операций, и какой – при проведении краткосрочных, сравним величины множителей наращенения по простым и по сложным процентам. Для этого выберем единый уровень процентной ставки, равный 10% годовых. Временной базой будем считать год, равный 365 дням.

Расчет множителей наращенения по простым и сложным процентам для

$$j=0,1$$

■ t=30 дней: а) $1 + \frac{30}{365} \cdot 0,1 = 1,0082$

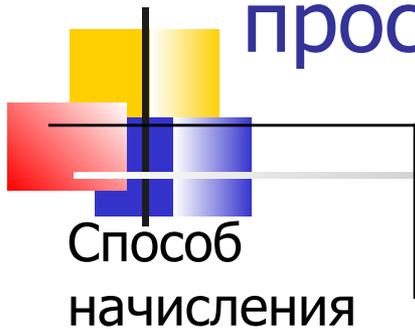
б) $(1 + 0,1)^{\frac{30}{365}} = 1,0079$

■ t=10 лет: а) $1 + 10 \cdot 0,1 = 2,0$

б) $(1 + 0,1)^{10} = 2,5937$

Значения множителей наращенения занесем в таблицу.

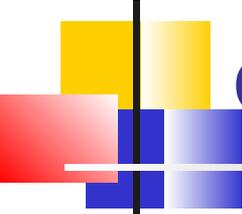
Сравнение множителей наращенния по простым и сложным процентам



Значения множителей наращенния в зависимости от срока операции

Способ начисления	30 дней	180 дней	1 год	5 лет	10 лет	20 лет
Простые проценты	1,0082	1,0493	1,10	1,5	2,0	3,0
Сложные проценты	1,0079	1,0481	1,10	1,6105	2,5937	6,7275

При $0 < n < 1$ $(1+i)^n < 1+n \cdot i$; при $n > 1$ $(1+i)^n > 1+n \cdot i$;
При $n=1$ значения множителей наращенния равны.



Эквивалентность процентных ставок

- **Эквивалентными** называют процентные ставки, которые при замене одной на другую приводят к одинаковым финансовым результатам. В этом случае отношения сторон не изменяются в рамках одной финансовой операции.

Условия эквивалентности простой и сложной процентных ставок

Определим соотношение эквивалентности между простой процентной ставкой наращенная и сложной процентной ставкой.

- Для решения поставленной цели приравняем множители наращенная друг другу: $1+i \cdot n=(1+j)^n$,

где i - простая процентная ставка;

j – сложная процентная ставка;

n – срок финансовой операции в годах.

Решим это уравнение относительно i и j .

$$i = \frac{(1+j)^n - 1}{n}.$$

$$j = \sqrt[n]{1+ni} - 1.$$

Пример

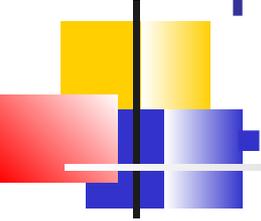
■ Кредит предоставлен под 20% простых годовых на полгода. Определите доходность финансовой операции в виде сложной годовой процентной ставки.

■ Решение:

■ $i = 0,2; \quad n = 0,5.$

$$\begin{aligned} j &= \sqrt[n]{1 + ni} - 1 = \sqrt[0,5]{1 + 0,5 \cdot 0,2} - 1 = \\ &= (1 + 0,1)^2 - 1 = 1,21 - 1 = 0,21 \end{aligned}$$

■ Ответ: 21%



Наращение процентов m раз в году

Иногда в финансовых операциях в качестве периода наращенения процентов используется не год, а, например, полугодие, квартал, месяц или другой период времени. В этом случае проценты начисляются m раз в году.

- В контрактах, как правило, фиксируется не ставка за процентный период, а годовая ставка процентов, которая в этом случае называется **номинальной**.

Наращение процентов m раз в году

Пусть годовая (номинальная) ставка равна i .

Срок финансовой операции n лет.

- Число периодов начисления процентов m раз в год.
- Проценты каждый раз начисляются по ставке i/m .
- Количество начислений процентов составит $m \cdot n$.
- Формула наращенного в этом случае:

$$FV = PV \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mn}$$

Пример

- Какой величины достигнет долг, равный 100 000 рублей через 5 лет при ставке 15,5% сложных годовых, если проценты начисляются ежеквартально?

- Решение:

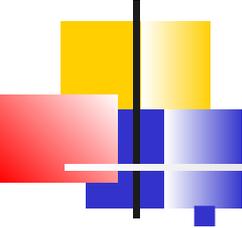
- *PV = 100 000 рублей;*

n = 5 лет; i = 0,155; m = 4.

$$FV = PV \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mn} = 100000 \left(1 + \frac{0,155}{4} \right)^{4 \cdot 5} =$$
$$= 213904,9 \text{ рублей}$$

Номинальная и эффективная ставка процентов

- Предположим, согласно договору годовая процентная ставка $i=12\%$. Проценты начисляются ежеквартально.
- Тогда количество начислений в год $m = 4$, а начисление будет производиться по ставке
$$\frac{i}{m} = \frac{0,12}{4} = 0,03.$$
- За год множитель наращенения составит
$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = (1 + 0,03)^4 = 1,1255$$
- Таким образом, эффективная (фактическая) ставка наращенения – 12,5%, а объявленная номинальная ставка – 12%.

- 
- **Эффективная ставка процента** измеряет тот реальный доход, который получают в целом за год от начисления процентов.

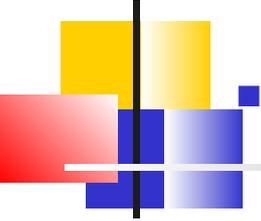
Номинальной называется процентная ставка, используемая для расчетов, для фиксирования в договорах.

- Эффективная годовая ставка а f может быть определена из уравнения:

- Таким образом
$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = 1 + f,$$

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1.$$

Пример



Найдите эффективную ставку процента, если номинальная ставка равна 24% при ежемесячном начислении процентов.

- Решение:
- $i=0,24; m=12.$

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12} - 1 = 0,268$$

- **Ответ: 26,8%.**

Номинальная и эффективная учетные ставки

Номинальная учетная ставка d используется в контрактах. Эффективная учетная ставка f характеризует фактическое дисконтирование за год. Ее можно определить из равенства:

$$1 - f = \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m, \quad \text{тогда}$$

$$f = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m$$

Для одних и тех же условий эффективная учетная ставка меньше номинальной.

Пример

- Ценная бумага на сумму 500000 рублей, срок платежа по которой наступает через 3 года, продана с дисконтом по номинальной учетной ставке 12% при ежемесячном дисконтировании. Определите сумму дисконта и эффективную учетную ставку.

- Решение: $FV = 500000$ руб.; $n = 3$ года; $d = 0,12$; $m = 12$.

$$PV = 500000 \left(1 - \frac{0,12}{12} \right)^{12 \cdot 3} = 500000 \cdot 0,696413 = 348206,5 \text{ рублей}$$

$$D = 500000 - 348206,5 = 151793,5 \text{ рублей}$$

- $f = 1 - \left(1 - \frac{0,12}{12} \right)^{12} = 0,1136$ то есть 11,36%.