Федеральная таможенная служба

Государственное казенное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«РОССИЙСКАЯ ТАМОЖЕННАЯ АКАДЕМИЯ»
RUSSIAN CUSTOMS ACADEMY

Лекция 2:

«Теория принятия решений в условиях неопределенности»

Доктор экономических наук, профессор
Блау Светлана Леонидовна

Основные вопросы

1. Принятие решений в условиях неопределенности
2. Основные понятия теории игр
3. Математическая модель игры
4. Игры с седловой точкой
5. Игры с природой

1. Принятие решений в условиях неопределенности

- Условия неопределенности при любых видах финансово-экономической деятельности обусловлены следующими факторами:
- 1) отсутствие полной информации;
- 2) случайность;
- 3) противодействие.
- 1) Отсутствие полной информации о хозяйственной ситуации и перспективах ее изменения заставляет ЛПР искать возможность приобрести недостающую информацию или принимать решение наугад, опираясь на свой опыт и интуицию.

- 2) Случайность заранее нельзя предвидеть. В одинаковых условиях случайное событие может произойти, а может и не произойти, случайная величина может принимать различные значения, а случайные процессы в сходных условиях могут протекать по-разному.
- Однако при большом количестве наблюдений можно обнаружить, что в мире случайностей проявляются определенные закономерности.

- В качестве математического аппарата для изучения этих закономерностей используют теорию вероятностей и математическую статистику.
- Количественной мерой возможности появления случайного события является вероятность.
- За вероятность события А принимают отношение числа случаев, благоприятствующих наступлению этого события m к общему числу всех равновозможных случаев n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

- Финансовые показатели, которые используют при обосновании управленческих решений , часто представляют собой случайные величины.
- Если для случайной величины задан закон распределения (т.е. правило, устанавливающее связь между значениями случайной величины и их вероятностями), то можно определить математическое ожидание этой случайной величины.

- Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

X_i	x_1	x_2	...	x_n
P_i	p_1	p_2	...	p_n

- определяется по формуле:

$$M = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n .$$

- Пример. Предположим, случайный доход финансовой операции задан законом распределения:

X_i	-30	10	25	40
P_i	0,1	0,2	0,5	0,2

- Определите математическое ожидание дохода.

$$M = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n =$$

$$= -30 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,2 = 19,5.$$

- При обосновании управленческих решений математическое ожидание величины финансового показателя используют в качестве его прогнозируемого значения. Это позволяет снизить уровень неопределенности , следовательно , и степень риска.
- 3) Третьим фактором, обусловливающим наличие неопределенности является фактор противодействия.

- К противодействиям относятся катастрофы, природные явления, войны, революции, конфликты в трудовых коллективах, конкуренция, нарушения договорных обязательств, изменения спроса, аварии, кражи и т.п.
- ЛПР должно выбрать такую стратегию, которая позволит уменьшить степень противодействия , что, в свою очередь, снизит риск.
- Математический аппарат для выбора стратегии в конфликтных ситуациях – теория игр.

2. Основные понятия теории игр

- Игрой называется математическая модель конфликтной ситуации. Стороны, участвующие в конфликте, называются участниками игры или игроками, а исход конфликта - выигрышем.
- Игра ведется по определенным правилам, которые представляют собой систему условий, регламентирующих возможные действия игроков.

- Ходом называется выбор одного из предложенных правилами игры действий и его осуществление.
- Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

- Для того, чтобы найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, т.е. один из игроков должен получить максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются оптимальными. Любому из игроков невыгодно отказаться от своей стратегии в игре.

Математическая модель игры

- Пусть игрок **A** располагает m стратегиями, которые обозначим $A_1, A_2, \ldots , A_m$. Пусть у игрока **B** имеется n стратегий, обозначим их $B_1, B_2, \ldots, B_n$. В этом случае игра имеет размерность $m \times n$. В результате выбора игроками любой пары стратегий A_i и B_j ($i = 1,2, \ldots m$; $j = 1,2, \ldots, n$) однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш a_{ij} игрока **A** (положительный или отрицательный) и проигрыш ($-a_{ij}$) игрока **B**.

- Предположим, что значения a_{ij} известны для любой пары стратегий (A_i,B_j). Матрица $P = (a_{ij})$, $i = 1,2, \ldots , m$; $j = 1,2, \ldots, n$, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям A_i, и B_j, называется платежной матрицей или матрицей игры:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Нижняя цена игры

- Обозначим через α_i наименьший выигрыш игрока **А** при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий игрока **В** (наименьшее число в i-ой строке платежной матрицы). Среди всех чисел α_i ($i = 1,2, \ldots, m$) выберем наибольшее: $\alpha = \max \{\alpha_i\}$.
- Число α называется нижней ценой игры. Это гарантированный выигрыш игрока **А** при любой стратегии игрока **В.**

Верхняя цена игры

- Игрок **В** заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока **А**, (а следовательно - свой проигрыш). Выбирая стратегию B_j, он учитывает максимально возможный при этом выигрыш игрока **А**. Обозначим β_j наибольший возможный выигрыш игрока при выборе игроком **В** его стратегии B_j (наибольшее число в j-ом столбце платежной матрицы). Среди всех чисел β_j (j = 1,2, …, n) выберем наименьшее: $\boldsymbol{\beta} = \min\{\boldsymbol{\beta} j\}$.
- Число **β** называется верхней ценой игры. Это гарантированный проигрыш игрока **В**.

Игра с седловой точкой

- Фактический выигрыш игрока **А** при разумных действиях партнеров ограничен нижней и верхней ценой игры.
- Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то общее значение верхней и нижней цены игры $\alpha=\beta=v$ называется ценой игры. В этом случае игра называется вполне определенной или игрой с седловой точкой.

- Седловой точкой называется элемент платежной матрицы, одновременно минимальный в своей строке и максимальный в своем столбце.
- Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков A_i и B_j, их совокупность - это решение игры, которое обладает следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого отклонение от его оптимальной стратегии невыгодно. В этом случае говорят, что игра имеет решение в чистых стратегиях.

Пример

- Найти решение игры, заданной платежной матрицей:

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}$$

- (Игрок **А** имеет 3 стратегии: A_1;A_2;A_3. Игрок **В** имеет 4 стратегии: B_1;B_2;B_3;B_4.

Решение:

- Определим наименьшие по строкам числа α_i и наибольшие по столбцам числа β_j:

$$\begin{array}{cc} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha_i \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{array} \\ \beta_j \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 5 & \end{array}$$

- Определим нижнюю цену игры:

$\alpha = \max\{\alpha_i\} = \max\{0,2,-1\} = 2.$

- Верхняя цена игры:
- $\beta = \min\{\beta_j\} = \min\{3,2,4,5\} = 2.$

- Поскольку $\alpha=\beta=v=2$, то платежная матрица содержит седловую точку, а игра имеет решение в чистых стратегиях.

$$\begin{array}{cc} & \alpha_i \\ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & \boxed{2} & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ -1 \end{array} \\ \beta_j \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 5 & \end{array}$$

- Седловая точка находится во второй строке и втором столбце, следовательно оптимальными являются стратегии A_2 и B_2. При этом цена игры $v=2$.

- Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В таком случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя чистые стратегии.

Игры с природой

- В некоторых случаях успех экономической деятельности зависит не от сознательно противодействующего конкурента, а от объективной действительности, которую принято называть "природой".
- Пусть игрок **A** располагает m стратегиями, которые обозначим A_1, A_2, … , A_m, а относительно "природы" известно, что она может принимать n различных состояний, обозначим их P_1, P_2, … P_n.

- Известен выигрыш a_{ij} игрока **А** при каждой паре стратегий игрока и "природы", т.е. известна платежная матрица:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Игрок **А** в играх с "природой" старается действовать осмотрительно, используя стратегию, позволяющую получить наибольший выигрыш (наименьший проигрыш).
- "Природа" (игрок **Р**) действует случайно, возможные стратегии определяются как ее состояние (погода, спрос на определенную продукцию, сочетание производственных факторов).

- Различают игры с "природой" *в условиях определенности* и игры с "природой" *в условиях неопределенности*.
- В первом случае задано распределение вероятностей состояний природы, во втором - оно неизвестно. В этом случае приходится принимать решение *в условиях риска.*

- *Риском* игрока **А** при использовании стратегии A_i при состоянии "природы" P_j называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал P_j и выигрышем, который он получит в обычных условиях, применяя стратегию A_i:
- $r_{ij} = \beta_j - \alpha_{ij}$, где $\beta_j = \max_i \{\alpha_{ij}\}$.
- Рассмотрим критерии, используемые при решении игр с природой.

Критерий Бейеса-Лапласа

- При известном распределении вероятностей различных состояний природы $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n,)$, где $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, критерием принятия решений является максимум математического ожидания выигрыша, т.е.
- $V_{B\text{-}L} = \max\limits_{i} \sum\limits_{j} a_{ij}\, p_j$, где $i = 1,2, \ldots, m$.

Критерий Лапласа

- Если ни одно из состояний "природы" нельзя предпочесть другим, выдвигают гипотезу о том, что все они равновероятны:
- $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$.
- Тогда $V_L = \max\limits_{i} \sum\limits_{j} a_{ij} \cdot 1/n$.

Максиминный критерий Вальда

- Он основан на выборе стратегии игрока **A,** позволяющей гарантировать ему получение нижней цены игры:
- $V_W = \max_{i} \min_{j} a_{ij}.$

Критерий минимального риска Сэвиджа

- Рекомендует выбирать стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.
- $V_S = \min\limits_{i} \max\limits_{j} r_{ij}.$
- Критерии Вальда и Сэвиджа основаны на пессимистической оценке обстановки. В отличие от них следующий критерий использует как пессимистический, так и оптимистический подход к ситуации.

Критерий Гурвица

- По этому критерию выбирается максимум линейной комбинации максимальных или минимальных выигрышей.
- $V_H = \max_i \{\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}\}$.
- Если λ=1, критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда. При λ=0 - в критерий крайнего оптимизма, рассчитанный на наилучшее стечение обстоятельств. Обычно λ принимают в пределах от 0,5 до 0,7.

Задача

- Возможно строительство четырех типов электростанций: тепловых (стратегия A_1), приплотинных (A_2), бесшлюзовых (A_3), шлюзовых (A_4). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и т.п.
- Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов.

- Состояния природы обозначим через P_1, P_2, P_3 и P_4. Экономическая эффективность строительства отдельных видов электростанций изменяется в зависимости от состояний природы и задана матрицей:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Необходимо проанализировать ситуацию и выбрать оптимальную стратегию:

а) на основе критерия Бейеса - Лапласа при заданном распределении вероятности состояний природы **P** = (1/7, 2/7, 3/7, 1/7);

- б) на основе критерия Лапласа в предположении, что все состояния природы равновероятны;
- в) используя максиминный критерий Вальда;
- г) на базе критерия минимального риска Сэвиджа;
- д) на основе критерия Гурвица при λ = 0,6.

Решение:

- а) Определим математические ожидания выигрыша игрока **А** при выборе им стратегии A_i:
- $A_1 \Rightarrow M_1 = 5\cdot 1/7 + 2\cdot 2/7 + 8\cdot 3/7 + 4\cdot 1/7 = 37/7 \approx 5{,}29$;
- $A_2 \Rightarrow M_2 = 2\cdot 1/7 + 3\cdot 2/7 + 4\cdot 3/7 + 12\cdot 1/7 = 32/7 \approx 4{,}57$;
- $A_3 \Rightarrow M_3 = 8\cdot 1/7 + 5\cdot 2/7 + 3\cdot 3/7 + 10\cdot 1/7 = 37/7 \approx 5{,}29$;
- $A_4 \Rightarrow M_4 = 1\cdot 1/7 + 4\cdot 2/7 + 2\cdot 3/7 + 8\cdot 1/7 = 23/7 \approx 3{,}29$.
- $V_{B\text{-}L} = max$ {5,29; 4,57; 5,29; 3,29} =5,29.
- В соответствии с этим по критерию Бейеса-Лапласа наиболее предпочтительными являются стратегии A_1 и A_3.

- б) Если предположить, что все состояния природы равновероятны, то $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$.
- Определим математические ожидания выигрыша игрока **A** при выборе им стратегии A_i:
- $A_1 \Rightarrow \sum a_{1j} /4 = (5+2+8+4)/4 = 19/4 = 4{,}75$;
- $A_2 \Rightarrow \sum a_{2j} /4 = (2+3+4+12)/4 = 21/4 = 5{,}25$;
- $A_3 \Rightarrow \sum a_{3j} /4 = (8+5+3+10)/4 = 26/4 = 6{,}5$;
- $A_4 \Rightarrow \sum a_{4j} /4 = (1+4+2+8)/4 = 15/4 = 3{,}75$.
- Поскольку $V_L = max\ \{4{,}75;\ 5{,}25;\ 6{,}5;\ 3{,}75\} = 6{,}5$, то по критерию Лапласа оптимальной является стратегия A_3.

- в) Согласно критерию Вальда
- $V_W = \max_i \min_j a_{ij}. = \max \{2,2,3,1\}=3$
- Следовательно максиминная стратегия игрока **А** - A_3.
- г) Построим матрицу рисков.
-

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \boxed{8} & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \boxed{12} \\ \boxed{8} & \boxed{5} & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- г) Согласно критерию Сэвиджа определяем:
- $V_S = \min \max r_{ij} = \min\{8,6,5,7\} = 5.$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & \boxed{8} \\ \boxed{6} & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 2 \\ \boxed{7} & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- В соответствии с этим критерием также наиболее предпочтительна стратегия A_3.

- д) Воспользуемся критерием Гурвица при при $\lambda = 0{,}6$.
- Определим значение $V_H = max\ \{\lambda min\ a_{ij} + (1-\lambda) max\ a_{ij}\} =$

  $max\ \{0{,}6\ min\ a_{ij} + 0{,}4\ max\ a_{ij}\} =$ $= max\ \{0{,}6 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot 8;\ 0{,}6 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot 12;\ 0{,}6 \cdot 3 + 0{,}4 \cdot 10;\ 0{,}6 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 8\} = max\ \{4{,}4;\ 6{,}0;\ 5{,}8;\ 3{,}8\} = 6{,}0$. Таким образом, согласно критерию Гурвица оптимальной является стратегия A_2.
- Анализ результатов, проведенный на основе различных критериев, показывает, что доминирующей является стратегия A_3.